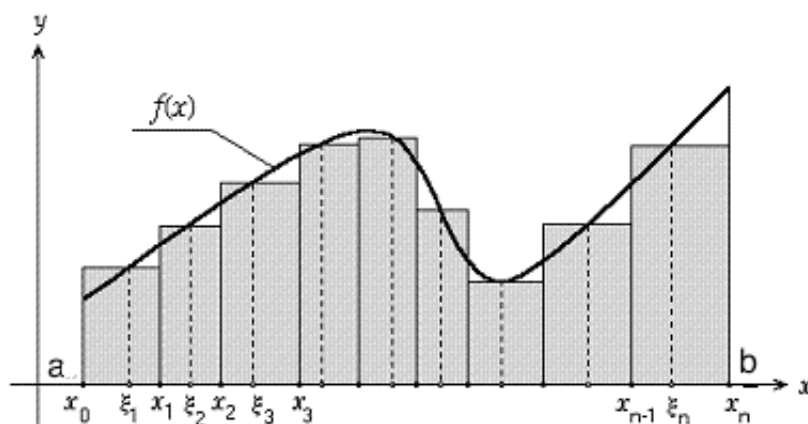


Apibrėžtinis integralas

Apibrėžtis. Tarkime, tolydžioji funkcija $f(x)$ apibrėžta uždarajame intervale $[a, b]$. Šis intervalas taškais $x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ dalijamas į n dalių. Kiekvienoje dalyje bet kaip parenkami taškai $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n$ ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$) ir juose apskaičiuojamos funkcijos reikšmės $f(\xi_1), f(\xi_2), f(\xi_3), \dots, f(\xi_{n-1}), f(\xi_n)$.



Šių reikšmių ir intervalų ilgių $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \Delta x_3 = x_3 - x_2, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

sandaugų suma $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ vadinama funkcijos $f(x)$ integraline suma (*Rymano* integraline suma) intervale $[a, b]$. Šios sumos riba, kai intervalų skaičius n neapbrėžtai didėja ir didžiausio intervalo ilgis artėja prie nulio, vadinama funkcijos $f(x)$ apibrėžtiniu integralu. Žymima:

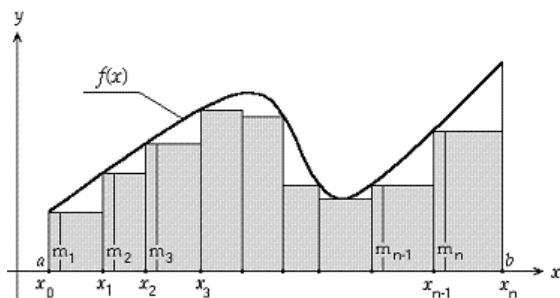
$$\int_b^a f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sigma.$$

Darbu suma

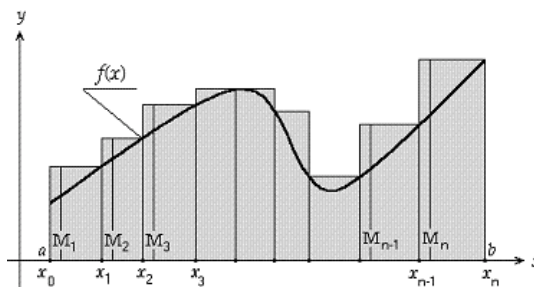
Nagrinėkime dar dvi integralines sumas. Pažymėkime: $M_i = \sup\{f(x)\}, x \in [x_{i-1}, x_i]$; $m_i = \inf\{f(x)\}, x \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}$. Viršutinė $S = \sum_{i=1}^n \Delta x_i M_i$, apatinė $s = \sum_{i=1}^n \Delta x_i m_i$ Darbu suma. Kadangi $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$):

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i m_i \leq \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(\xi_i) \leq \sum_{i=1}^n \Delta x_i M_i, \text{ t. y. } s \leq \sigma \leq S.$$

Geometrinės Darbų sumos interpretacijos pateiktos 2;3 pav.



2 pav. Apatinė Darbu suma



3 pav. Viršutinė Darbu suma

1 Teorema. Tolydi atkarpoje $[a; b]$ funkcija $f(x)$ yra integruojama Rymano prasme.

2 Teorema. Monotoniška atkarpoje $[a; b]$ funkcija $f(x)$ yra integruojama Rymano prasme.

3 Teorema. Dalimis tolydi atkarpoje $[a; b]$ funkcija $f(x)$ yra integruojama Rymano prasme.

Apibrėžtinio integralo savybės:

1. Integralas $\int_a^b f(x)dx$ buvo apibrėžtas, kai $a > b$, susitarsime, jei $a < b$, tuomet

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx; \quad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

2. Baigtinio skaičiaus funkcijų sumos integralas lygus integralų sumai:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \dots + \int_a^b f_m(x)dx$$

Irodymas.

$$\begin{aligned} \int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x))dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f_1(x_i) + f_2(x_i) + \dots + f_m(x_i)) \Delta x_i = \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_1(x_i) \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_2(x_i) \Delta x_i + \dots + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_m(x_i) \Delta x_i = \\ &= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \dots + \int_a^b f_m(x)dx. \end{aligned}$$

$$3. \int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Irodymas.

$$\int_a^b c f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n c f(x_i) \Delta x_i = c \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = c \int_a^b f(x)dx.$$

4. Bet kokiems skaičiams a, b, c : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Irodymas.

Tarkime, kad $a < c < b$, tuomet intervalą $[a, b]$ galima suskaidyti į dvi dalis taip kad taškas c būtų dalijimo taškas, tuomet skaičiuodami ribą šiai lygybei $\sum_a^b f(c_i) \Delta x_i = \sum_a^c f(c_i) \Delta x_i + \sum_c^b f(c_i) \Delta x_i$, kai $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ gausime lygybę.

Kai $a < b < c$

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c = \int_a^b - \int_b^a. \text{ Todėl } \int_a^c + \int_c^b = \int_a^b$$

5. Jei $f(x) \geq 0$ atkarpoje $[a, b]$ $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Irodymas. Kadangi $f(\xi_i) \geq 0$, kai $\xi \in [a, b]$ ir $\Delta x_i \geq 0$, visi integralinės sumos $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ nariai yra neneigiami ir neneigiamos skaičių sekos riba yra neneigiama.

6. Jei $f(x) \geq g(x)$ atkarpoje $[a, b]$ $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Irodymas. Iš nelygybės $f(x) \geq g(x)$ išplaukia nelygybė $f(x) - g(x) \geq 0$, tuomet pagal 5 savybę: $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$, t.y. $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

7. Tarkime, kad $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$, tada

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Irodymas. Kadangi $m \leq f(\xi_i) \leq M$ ir $\Delta x_i \geq 0$, tuomet skaičiuodami ribą nelygybei $\sum_{i=1}^n m \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M \Delta x_i$ (įvertinę, kad $\sum_{i=1}^n m \Delta x_i = m(b-a)$) gauname: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

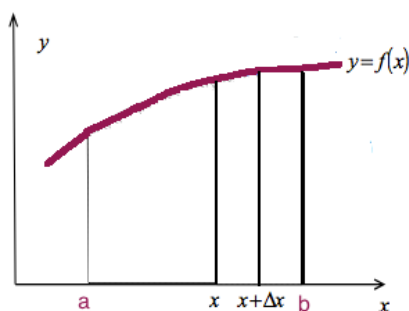
8. Vidurinių reikšmių teorema. Jei funkcija $f(x)$ tolydi atkarpoje $[a, b]$, tai egzistuoja toks atkarpos taškas c , kuriame $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$.

Irodymas.

Tolydžioje atkarpoje funkcija $f(x)$ įgyja mažiausią m ir didžiausią reikšmę M : $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$, todėl $m \leq f(x) \leq M$, ir reikšmes tuomet 7 savybę padalijus iš dydžio $b-a > 0$, gauname, kad dydis $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$ ir $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$, iš čia $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$.

9. Jei $y = f(x)$ yra tolydi funkcija ir $\Psi(x) = \int_a^x f(t) dt$, tai $\Psi'(x) = f(x)$.

Irodymas. Jei funkcija integruojama intervale $[a, b]$, tai ji bus integruojama ir atkarpoje $[a, x]$, kai $x \in [a, b]$. Nagrinėkime integralą $\int_a^x f(t)dt$, kuris geometriškai reikštų kreivinės trapecijos, turinčios kintamą kraštinę, plotą (4 pav.). Tegul $\int_a^x f(t)dt = \Psi(x)$, tuomet $\Delta\Psi = \Psi(x + \Delta x) - \Psi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$.



4 pav.

Pritaikius integralui $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ vidurinių reikšmių teoremą, gauname:

$$\begin{aligned}\Delta\Psi &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)(x + \Delta x - x) \\ &= f(c)\Delta x, \quad x < c < x + \Delta x.\end{aligned}$$

Tuomet $\frac{\Delta\Psi}{\Delta x} = f(c)$, $\Psi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Psi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c)$. Kadangi $c \rightarrow x$, kai $\Delta x \rightarrow 0$, dėl funkcijos $f(x)$ tolydumo $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$. $\Psi'(x) = f(x)$.

Niutono Leibnico formulė.

Jei funkcijos $f(x)$ pirmąją yra $F(x)$, tai apibrėžtiniam integralui teisinga Niutono ir Leibnico formulė: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Irodymas. Kadangi ir $F'(x) = f(x)$, ir $\Psi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$, tai $F(x) - \Psi(x) = C$, kai $x \in [a, b]$. Šioje tapatybėje vietoj x įrašykime a ir b . Tada $\begin{cases} F(a) - \Psi(a) = C, \\ F(b) - \Psi(b) = C. \end{cases}$ Bet $\Psi(a) = 0$, o $\Psi(b) = \int_a^b f(x)dx$. Todėl iš antrosios lygybės atėmę pirmąją, gauname Niutono ir Leibnico formulę.

(Isaac Newton, 1643–1727, anglų fizikas ir matematikas; Gottfried Wilhelm Leibnitz, 1646–1716, vokiečių filosofas, logikas, matematikas, fizikas).

Apibrėžtinio integralo skaičiavimas.

Apibrėžtiniame integrale $\int_a^b f(x)dx$ pakeitus integravimo kintamąjį pagal lygybę $x = \varphi(t)$ arba $t = u(x)$, reikia apskaičiuoti ir naujus integravimo rėžius: $t_1 = u(a)$, $t_2 = u(b)$. Tada

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} g(t) dt = G(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = G(t_2) - G(t_1).$$

Integravimo dalimis formulė apibrėžtiniam integralui yra tokia: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$

Pavyzdžiai

$$1) \int_0^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^1 = 1;$$

$$2) \int_0^1 \arctg x dx = x \cdot \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 x d \arctg x = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = I.$$

Keičiame integravimo kintamąjį pagal lygybę: $t = 1 + x^2$. Kintamojo t režiai: $t_1 = 1, t_2 = 2$. Tada

$$\text{gauname: } I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln |t| \Big|_1^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

3)

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{1+2\sin 6x}{\sin^2 3x} dx &= \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\sin^2 3x} + \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{4\sin 3x \cdot \cos 3x}{\sin^2 3x} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{d(3x)}{\sin^2 3x} + 4 \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{\cos 3x}{\sin 3x} dx = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x \Big|_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} + \frac{4}{3} \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{d(\sin 3x)}{\sin 3x} = \\ &= -\frac{1}{3} \left(\operatorname{ctg} 3 \cdot \frac{\pi}{12} - \operatorname{ctg} 3 \cdot \frac{\pi}{18} \right) + \frac{4}{3} \ln |\sin 3x| \Big|_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} = \\ &= -\frac{1}{3} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \right) + \frac{4}{3} \left(\ln \left| \sin 3 \cdot \frac{\pi}{12} \right| - \ln \left| \sin 3 \cdot \frac{\pi}{18} \right| \right) = \\ &= -\frac{1}{3} (1 - \sqrt{3}) + \frac{4}{3} \left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

4)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2dx}{\cos^3 x} = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x dx}{\cos^4 x} = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d \sin x}{(1 - \sin^2 x)^2} = I_1.$$

Keičiame integravimo kintamąjį pagal lygybę $t = \sin x$.

$$\text{Tada kintamojo } t \text{ režiai: } t_1 = \frac{1}{2}; t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$I_1 = 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(1-t^2)^2} = 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(1-t)^2(1+t)^2}.$$

Tuomet

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2} &= \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2} = \\ &= \frac{A(1-t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 + C(1+t)(1-t)^2 + D(1-t)^2}{(1-t)^2(1+t)^2} = \\ &= \frac{(-A+C)t^3 + (-A+B-C+D)t^2 + (A+2B-C-2D)t + A+B+C+D}{(1-t)^2(1+t)^2}; \end{aligned}$$

Iš tapatybės $(-A+C)t^3 + (-A+B-C+D)t^2 + (A+2B-C-2D)t + A+B+C+D = 1$ rasime neapibrėžtus koeficientus A , B , C ir D , sulyginę koeficientus prie vienodų t laipsnių:

$$\begin{cases} -A+C=0, \\ -A+B-C+D=0, \\ A+2B-C-2D=0, \\ A+B+C+D=1. \end{cases}$$

Iš šios sistemos gauname $A = \frac{1}{4}; B = \frac{3}{4}; C = \frac{1}{4}; D = -\frac{1}{4}$.

Tuomet

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{1-t} + \frac{3}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(1-t)^2} + \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(1+t)^2} = \\ &= \left(-\frac{1}{4} \ln|1-t| + \frac{3}{4} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{4} \ln|1+t| + \frac{1}{4} \frac{1}{1+t} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\ &= -\frac{1}{4} \left(\ln \left| 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| - \ln \left| 1 - \frac{1}{2} \right| - 3 \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} + 3 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \right. \\ &\quad \left. - \ln \left| 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \ln \left| 1 + \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \right) = \dots \end{aligned}$$

5)

$$\int_{-2}^{-1} \sqrt{\frac{x+1}{2x}} dx = I_1.$$

Įvesime naują kintamąjį $t = \sqrt{\frac{x+1}{2x}}$.

Tuomet $x = \frac{1}{2t^2 - 1}$; $dx = \frac{-4tdt}{(2t^2 - 1)^2}$; $t_1 = \frac{1}{2}$; $t_2 = 0$.

Ir tuomet

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{4t^2 dt}{(2t^2 - 1)^2} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t^2 - 1 + 1}{(2t^2 - 1)^2} dt = \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t^2 - 1}{(2t^2 - 1)^2} dt + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(2t^2 - 1)^2} = \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{2t^2 - 1} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{4 \left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = I_1. \end{aligned}$$

Tuomet

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} &= \frac{A}{t - \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{B}{\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \\ &+ \frac{C}{t + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{D}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{A \left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \end{aligned}$$

Tuomet

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} &= \frac{A}{t - \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{B}{\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \\ &+ \frac{C}{t + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{D}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{A \left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + B \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + C \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + D \left(t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \\
 & + \frac{\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2}{\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = \\
 & = \frac{(A+C)t^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}A + B - \frac{1}{\sqrt{2}}C + D \right)t^2}{\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} + \\
 & + \frac{\left(-\frac{1}{2}A + B - \frac{1}{2}C - D \right)t - \frac{\sqrt{2}}{4}A + \frac{1}{2}B + \frac{\sqrt{2}}{4}C + \frac{1}{2}D}{\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2}
 \end{aligned}$$

Iš tapatybės:

$$\begin{aligned}
 & (A+C)t^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}A + B - \frac{1}{\sqrt{2}}C + D \right)t^2 + \\
 & + \left(-\frac{1}{2}A + B - \frac{1}{2}C - D \right)t - \frac{\sqrt{2}}{4}A + \frac{1}{2}B + \\
 & + \frac{\sqrt{2}}{4}C + \frac{1}{2}D \equiv 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 A + C = 0, \\
 A + \sqrt{2}B - C + \sqrt{2}D = 0, \\
 -A + 2B - C - 2D = 0, \\
 -\sqrt{2}A + 2B + \sqrt{2}C + 2D = 4.
 \end{cases}$$

Iš šios sistemos gauname $A = -2; B = 1; C = 2; D = 1$. Tuomet:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \ln \left| \frac{t - \frac{1}{\sqrt{2}}}{t + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right| \Big|_0^{\frac{1}{2}} - 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t - \frac{1}{\sqrt{2}}} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} + \\
 & + 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t + \frac{1}{\sqrt{2}}} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = \ln \left| \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right| - 4 \ln \left| t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \\
 & - \frac{1}{t - \frac{1}{\sqrt{2}}} \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \ln \left| t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \Big|_0^{\frac{1}{2}} - 2 \frac{1}{t + \frac{1}{\sqrt{2}}} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \dots
 \end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} e^x \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} e^x d\cos 2x = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x de^x = -\frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{6}} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{12}} \cos \frac{\pi}{6} + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} e^x \cos 2x dx = -\frac{1}{4} e^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\sqrt{3}}{4} e^{\frac{\pi}{12}} + \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} e^x d\sin 2x = \\
 &= -\frac{1}{4} e^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\sqrt{3}}{4} e^{\frac{\pi}{12}} + \frac{1}{4} e^x \sin 2x \Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} e^x \sin 2x dx = \\
 &= -\frac{1}{4} e^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\sqrt{3}}{4} e^{\frac{\pi}{12}} + \frac{\sqrt{3}}{8} e^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{8} e^{\frac{\pi}{12}} - \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} e^x \sin 2x dx; \\
 \frac{5}{4} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} e^x \sin 2x dx &= \frac{\sqrt{3}-2}{4} e^{\frac{\pi}{6}} - \frac{\sqrt{3}-1}{8} e^{\frac{\pi}{12}}; \\
 \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} e^x \sin 2x dx &= \frac{\sqrt{3}-2}{5} e^{\frac{\pi}{6}} - \frac{\sqrt{3}-1}{10} e^{\frac{\pi}{12}};
 \end{aligned}$$

Apytikslis apibrėžtinių integralų skaičiavimas

Tarkime, kad reikia apytiksliai apskaičiuoti integralą $\int_a^b f(x)dx$, taškais $x_0 = a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b$

dalijant intervalą $[a, b]$ į n lygių dalių, kurių ilgis $h = \frac{b-a}{n}$. Apskaičiuojant integralą stačiakampių

metodu, tariama, kad kreivinės trapecijos plotas apytiksliai lygus n stačiakampių plotų sumai. Jei stačiakampių aukštinės yra ordinatės $\bar{y}_i = f(\bar{x}_i)$, atitinkančios intervalų vidurio taškus $\bar{x}_i$, tai

gaunama viduriniųjų stačiakampių formulė: $\int_a^b f(x)dx \approx h(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_n)$. Šios formulės paklaida

$R_n(f)$ įvertinama taip: $|R_n(f)| \leq M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{24n^2}$, čia $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$.

Trapecijų formulė gaunama manant, kad kreivinės trapecijos plotas apytiksliai lygus n trapecijų plotų sumai. Šių trapecijų aukštis $h = \frac{b-a}{n}$, o pagrindai $y_i = f(x_i)$. Trapecijų formulė:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right).$$

Šios formulės paklaida $R_n(f)$ įvertinama taip: $|R_n(f)| \leq M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$.

Jeigu M_2 rasti negalima arba sunku, viduriniųjų stačiakampių ir trapecijų formulių paklaidą galima gauti papildomai dalijant intervalą $[a, b]$ į $2n$ lygių dalių ir tikrinant, kiek ženklų po kablelio sutampa gautose apytikslėse integralų I_n ir I_{2n} reikšmėse. Sutampantys ženklai laikomi tikraisiais.

Parabolių, arba Simpsono (*Thomas Simpson, 1710–1761, anglų matematikas*), formulė gauta 1742 m., n kreivinių trapecijų plotus pakeitus parabolinių trapecijų plotais. Šiuo atveju intervalas $[a, b]$ dalijamas į $2n$ lygių dalių taškais $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{2n} = b$. Funkcijos $f(x)$ reikšmės šiuose taškuose pažymėkime $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n}$. Tada pirmosios parabolinės trapecijos, kai parabolė $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ nubrėžta per taškus $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$, ploto S_1 išraiška yra tokia:

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_2} (a_1x^2 + b_1x + c_1) dx = \frac{b-a}{6n} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Analogiškai gautume antrosios parabolinės trapecijos, kai parabolė $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ nubrėžta per taškus $(x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$, ploto S_2 išraišką:

$$S_2 = \int_{x_2}^{x_4} (a_2x^2 + b_2x + c_2) dx = \frac{b-a}{6n} (y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Paskutiniosios (n -osios) parabolinės trapecijos ploto išraiška:

$$S_n = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} (a_nx^2 + b_nx + c_n) dx = \frac{b-a}{6n} (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Tada $\int_a^b f(x) dx \approx S_1 + S_2 + \dots + S_n$.

Simpsono formulė:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} ((y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})).$$

Šios formulės paklaidai $R_n(f)$ teisingos nelygybės:

$$|R_n(f)| \leq M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{81n^2};$$

$$|R_n(f)| \leq M_4 \cdot \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}, \quad \text{čia } M_4 = \max_{[a,b]} |f^{IV}(x)|.$$

Jeigu M_2 ar M_4 rasti sudėtinga, Simpsono formulių paklaidą galima gauti papildomai dalijant intervalą $[a, b]$ į $4n$ lygių dalių ir tikrinant, kiek ženklų po kablelio sutampa gautose apytikslėse integralų I_{2n} ir I_{4n} reikšmėse.

Pavyzdys

Apytiksliai apskaičiuokime apibrėžtinį integralą $\int_{2,0}^{2,8} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x^2}} dx$, taikydami viduriniųjų stačiakampių, trapecijų ir parabolų formules, intervalą $[2,0; 2,8]$ dalydami į 4 lygias dalis ir pointegralinės funkcijos reikšmes apskaičiuodami 0,0001 tikslumu.

Iš pradžių apskaičiuokime funkcijos reikšmes:

$$\begin{aligned} y_0 &= f(2,0) = 1,9230; & y_1 &= f(2,1) = 2,0594; & y_2 &= f(2,2) = 2,1978; \\ y_3 &= f(2,3) = 2,3382; & y_4 &= f(2,4) = 2,4806; & y_5 &= f(2,5) = 2,6248; \\ y_6 &= f(2,6) = 2,7709; & y_7 &= f(2,7) = 2,9188; & y_8 &= f(2,8) = 3,0684. \end{aligned}$$

Šitaip pažymėję funkcijos reikšmes, gausime tokias apibrėžtinio integralo apytikslio skaičiavimo formules:

a) viduriniųjų stačiakampių formulė:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{4} (y_1 + y_3 + y_5 + y_7);$$

b) trapecijų formulė:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{4} \left(\frac{y_0 + y_8}{2} + y_2 + y_4 + y_6 \right);$$

c) parabolų formulė:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{12} ((y_0 + y_8) + 2y_4 + 4(y_2 + y_6)).$$

Tada apytikslės apibrėžtinio integralo reikšmės, kai intervalas $[2; 2,8]$ padalytas į 4 lygias dalis, yra tokios:

$$AI_{stač.} = 1,98825; \quad AI_{trap.} = 1,98901; \quad AI_{par.} = 1,98849.$$