3. Konverguojančios sekos ir jų pagrindinės savybės

3.1. Konverguojančios sekos samprata

1. Apibrėžimas. Sakoma, kad seka $\{x_n\}$ konverguoja, jeigu egzistuoja toks skaičius a, kad seka $\{x_n - a\}$ yra nykstamai mažėjanti. Tokiu atveju skaičius a vadinamas sekos $\{x_n\}$ riba. Rašoma

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Pagal šį apibrėžimą bet kuri nykstamai mažėjanti seka konverguoja, ir jos riba yra lygi 0.

Konverguojančią seką galima apibrėžti ir taip:

2. Apibrėžimas. Sakoma, kad seka $\{x_n\}$ konverguoja, jeigu egzistuoja toks skaičius a, kad bet kuriam teigiamam skaičiui $\varepsilon > 0$ galima nurodyti tokį skaičių N, kad visi sekos elementai x_n, kai $n \geqslant N$ tenkina nelygybę

$$(1) \qquad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Naudodami matematinę simboliką pastarąjį apibrėžimą užrašome taip:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon, \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, n > N, |x_n - a| < \varepsilon)$$

Pastebėsime, kad N yra kintamojo ε funkcija: $N = N(\varepsilon)$.

Kartais neaprėžtai didėjančios sekos vadinamos konverguojančiomis į begalybę. Jei $\{x_n\}$ – neaprėžtai didėjanti, tai rašoma

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

Jei neaprėžtai didėjančios sekos nariai, pradedant nuo tam tikro numerio, yra pastovaus ženklo, tai sakoma, kad seka konverguoja į apibrėžto ženklo begalybę. Simboliškai tai užrašoma

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

Toliau laikysime, kad konverguojančios sekos riba – baigtinis skaičius a.

Taigi, tai, kad seka $\{x_n\}$ konverguoja į a, simboliškai žymima

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{arba} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$$

Pastaba. **(1)** nelygybė ekvivalenti dviem nelygybėms

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \quad \text{arba} \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Pastarosios nelygybės reiškia, kad elementas x_n priklauso skaičiaus a ε – aplinkai.

Prisiminsime, kad skaičiaus a ε – aplinka vadinamas intervalas $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Taigi konverguojančią seką galima apibrėžti ir taip:

3. Apibrėžimas. Sakoma, kad seka $\{x_n\}$ konverguoja, jeigu egzistuoja toks skaičius a, kad bet kuriai jo ε – aplinkai priklauso visi sekos $\{x_n\}$ nariai, pradedant tam tikru numeriu N, priklausančiu nuo ε.

Konverguojančios sekos apibrėžimuose sakoma, kad skirtumas $x_n - a = \alpha_n$ yra nykstamai mažėjanti seka. Taigi bet kuris konverguojančios sekos narys $\{x_n\}$ gali būti užrašomas pavidalu

$$(2) \qquad x_n = a + \alpha_n,$$

čia $a = \lim\limits_{n\to} x_n$.

Galima pastebėti, kad baigtinis skaičius sekos elementų neturi įtakos konvergavimui ir ribos reikšmei.

Pateiksime pora pavyzdžių:

1) Seka $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ konverguoja, jos riba lygi 1. Iš tikrųjų, kadangi

$$\frac{n}{n+1} - 1 = -\frac{1}{n+1},$$

tai belieka įsitikinti, kad seka $-\dfrac{1}{n+1}$ nykstamai mažėjanti. Jeigu $n \geqslant N$, tai

$$\left|-\frac{1}{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{N+1},$$

todėl pasirinktam $\varepsilon > 0$ pakanka imti N, tenkinantį sąlygą

$$\frac{1}{N+1} < \varepsilon \Rightarrow N > \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

pvz., galima imti

$$N = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1, & \text{kai} \quad \varepsilon \leqslant 0, \\ 1, & \text{kai} \quad \varepsilon > 0. \end{cases}$$

2) Įrodysime, kad seka $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.33$, …, $x_n = 0.\underbrace{333\ldots3}_{\text{n kartų}}$ konverguoja, ir jos riba yra $\dfrac{1}{3}$. Kadangi skaičius $\dfrac{1}{3}$ reiškiamas begaline periodine trupmena $0.33333\ldots$, tai turime

$$0.\underbrace{333\ldots3}_{\text{n kartų}} \leqslant \frac{1}{3} \leqslant 0.\underbrace{333\ldots3}_{\text{n kartų}} + \frac{1}{10^n}$$

Šios nelygybės reiškia, kad $\left|x_n - \dfrac{1}{3}\right| < \dfrac{1}{10^n}$. Kadangi kai $n \geqslant N$, tai turėsime $\dfrac{1}{10^n} \leqslant \dfrac{1}{10^N}$, todėl bet kuriam $\varepsilon > 0$ parinkdami N ir sąlygos $\dfrac{1}{10^N} < \varepsilon$, gausime $\left|x_n - \dfrac{1}{3}\right| < \varepsilon$, kai $n \geqslant N$.

3.2. Pagrindinės konverguojančiųjų sekų savybės

1. Teorema. Konverguojanti seka turi vienintelę ribą.

Įrodymas. Tegul a ir b – sekos $\{x_n\}$ ribos. Tada $x_n = a + \alpha_n$, $x_n = b + \beta_n$, čia α_n, β_n – nykstamai mažėjančios sekų $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ elementai. Atėmę vieną x_n išraišką iš kitos, gausime

$$\alpha_n - \beta_n = b - a.$$

Kadangi visi nykstamai mažėjančios sekos $\{\alpha_n - \beta_n\}$ nariai lygū konstantai $b - a$, tai ta konstanta lygi 0, t.y. $b - a = 0 \Rightarrow a = b$. Teorema įrodyta.

2. Teorema. Konverguojanti seka yra aprėžta.

Įrodymas. Tegul $\{x_n\}$ – konverguojanti seka, o jos riba lygi a. Tada, kaip jau buvo sakyta,

$$x_n = a + \alpha_n,$$

kur α_n – nykstamai mažėjančios sekos elementas. Kadangi nykstamai mažėjanti seka aprėžta, tai rasis toks skaičius A, kad visiems numeriams n bus $|\alpha_n| < \varepsilon$. Todėl

$$|x_n| < |a| + A,$$

o tai reiškia, kad seka $\{x_n\}$ aprėžta. Teorema įrodyta.

Pastebėsime, kad aprėžta seka gali neturėti ribos. Pavyzdžiui, seka 1, -1, 1, -1, …yra aprėžta, bet nekonverguoja. Iš tikrųjų, jei ši seka konverguotų į tam tikrą skaičių a, tai sekos $\{x_n - a\}$ ir $\{x_{n+1} - a\}$ būtų nykstamai mažėjančios. Tada

$$\{(x_n - a) - (x_{n+1} - a)\} = \{x_n - x_{n+1}\}$$

taip pat būtų nykstamai mažėjanti.

Tačiau tai neįmanoma, kadangi $|x_n - x_{n+1}| = 2\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Toliau įrodysime pagrindines teoremas apie sekų konvergavimą.

3. Teorema. Konverguojančių sekų $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ suma yra konverguojanti, jos riba lygi sekų $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ ribų sumai.

Įrodymas. Tegul a ir b atitinkamai $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ ribos. Tada

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

kur α_n ir β_n – nykstamai mažėjančios. Todėl

$$x_n + y_n - (a + b) = \alpha_n + \beta_n$$

Taigi $\{x_n + y_n - (a + b)\}$ –nykstamai mažėjanti seka. Tai reiškia, kad

$$x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\to} a + b.$$

4. Teorema. Dviejų konverguojančių sekų $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, skirtumas yra konverguojanti seka,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b, \quad \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = b - a.$$

5. Teorema. Dviejų konverguojančių sekų $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ sandauga yra konverguojanti seka, jos riba lygi $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ ribų sandaugai.

Įrodymas. Jeigu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, tai

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n.$$

Turime

$$x_n \cdot y_n = ab + a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n,$$

$$x_n \cdot y_n - ab = a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n.$$

Dešinėje pusėje esantys nariai pastarojoje lygybėje – nykstamai mažėjanios sekos, taigi ir $\{x_n y_n - ab\}$ – nykstamai mažėjanti. Taigi

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$$

Toliau nagrinėsime dviejų sekų $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ santykį. Prieš tai įrodysime lemą.

1. Lema. Jeigu seka $\{y_n\}$ konverguoja ir jos riba $b \neq 0$, tai, pradedant nuo tam tikro numerio, apibrėžta seka $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$, kuri yra aprėžta.

Įrodymas. Tegul $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$. Kadangi $b \neq 0$, tai $\varepsilon > 0$. Tegul N – numeris, atitinkantis tą ε, pradedant kuriuo, išpildoma nelygybė

$$|y_n - b| < \varepsilon, \quad \text{taigi} \quad |y_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

Iš čia išplaukia, kad, kai $n \geqslant N$, $|y_n| > \dfrac{b}{2}$. (Jei

$$b = b - y_n + y_n \quad \text{ir} \quad |b - y_n| < \frac{b}{2}, \quad \text{tai}$$

$$|b| \leqslant |b - y_n| + |y_n| \leqslant \frac{|b|}{2} + |y_n| \quad \Rightarrow \quad |y_n| \geqslant |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.)$$

Todėl kai $n \geqslant N$, turime $\left|\dfrac{1}{y_n}\right| < \dfrac{2}{|b|}$, taigi, pradedant tuo numeriu $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ aprėžta. Lema įrodyta.

Teorema 6. Dviejų konverguojančių sekų $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ santykis, su sąlyga, kad $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ yra konverguojanti seka, kurios riba lygi šių ribų santykiui.

Iš įrodytos lemos išplaukia, kad pradedant tam tikru numeriu N, sekos $\{y_n\}$ nariai nelygūs nuliui, ir seka $\{\frac{1}{y_n}\}$ aprėžta. Pradedant šiuo numeriu nagrinėsime seką $\{\frac{x_n}{y_n}\}$. Tegul a ir b – sekų $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ ribos. Įrodysime, kad $\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\}$ – nykstamai mažėjanti. Iš tikrųjų, kadangi

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n$$

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n \cdot b - y_n \cdot a}{y_n \cdot b} = \frac{x_n \cdot b - ab - (y_n \cdot a - ab)}{y_n \cdot b} =$$

$$= \frac{1}{y_n}\left(\frac{b(x_n - a) - a(y_n - b)}{b}\right) = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right).$$

Kadangi $\{\frac{1}{y_n}\}$ aprėžta, o seka $\{\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\}$ – nykstamai mažėjanti, tai seka $\{\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)\} = \{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\}$ – nykstamai mažėjanti. Teorema įrodyta.

Pastebėsime, kad iš $\{x_n\}$ konvergavimo išplaukia $\{x_n + b\}$ ir $\{cx_n\}$ konvergavimas.

3.3. Ribinis perėjimas nelygybėse

Teorema 7. Jeigu konverguojančios sekos $\{x_n\}$ nariai, pradedant tam tikru numeriu tenkina nelygybę $x_n \geqslant b \quad (x_n \leqslant b)$, tai ir šios sekos riba a tenkina nelygybę $a \geqslant b \quad (a \leqslant b)$.

Įrodymas. Tegul visi elementai x_n, pradedant tam tikru numeriu, tenkina $x_n \geqslant b$. Reikia įrodyti, kad $a \geqslant b$. Tarkime, kad $a < b$. Kadangi a – sekos $\{x_n\}$ riba, tai teigiamam $\varepsilon = b - a$ galima nurodyti tokį N, kad kai $n \geqslant N$ turime $|x_n - a| < b - a$.

Pastaroji nelygybė ekvivalenti tokioms:

$$-(b - a) < x_n - a < b - a$$

t.y., turime, kad $x_n < b$, o tai prieštarauja teoremos prielaidai. Atvejis $x_n \leqslant b$ nagrinėjamas analogiškai. Teorema įrodyta.

Pastebėsime, kad konverguojančios sekos $\{x_n\}$ elementai gali tenkinti griežtas nelygybes $x_n > b$, tačiau $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ gali būti lygus b. Pavyzdžiui, seka $\left\{x_n = \frac{1}{n}\right\}$ pasižymi tuo, kad $\frac{1}{n} > 0$, tačiau $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Išvada 1. Jeigu konverguojančių sekų $\{x_n\}, \{y_n\}$ elementai x_n ir y_n pradedant tam tikru numeriu tenkina nelygybes $x_n \leqslant y_n$, tai jų ribos tenkina nelygybę

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n$$

Įrodymas.

$$y_n - x_n \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n$$

Išvada 2. Jeigu visi konverguojančios sekos $\{x_n\}$ elementai x_n priklauso uždarajam intervalui $[a, b]$, tai ir jos riba priklauso tam intervalui.

Iš tikrųjų, kadangi $a \leqslant x_n \leqslant b$, tai jei $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, turėsime $a \leqslant c \leqslant b$.

Tolesnė teorema naudinga įvairiuose taikymuose.

Teorema 8. Tegul $\{x_n\}$ ir $\{z_n\}$ – konverguojančios sekos, turinčios bendrą ribą a. Tegul, be to, pradedant tam tikru numeriu, sekos $\{y_n\}$ nariai tenkina nelygybes $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Tada seka $\{y_n\}$ konverguoja ir jos riba lygi a.

Įrodymas. Pakanka įrodyti, kad $\{y_n - a\}$ – nykstamai mažėjanti. Pažymėsime N^* numerį, pradedant kuriuo yra tenkinamos abi nelygybės. Tada, pradedant tuo numeriu, turėsime

$$x_n - a \leqslant y_n - a \leqslant z_n - a.$$

Iš čia išplaukia, kad, kai $n \geqslant N^*$, $\{y_n - a\}$ nariai tenkina nelygybę

$$|y_n - a| \leqslant \max\{|x_n - a|, |z_n - a|\}$$

Kadangi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

tai $\forall \varepsilon > 0$ galima rasti tokius numerius N_1 ir N_2, kad, kai $n \geqslant N_1$ turime $|x_n - a| < \varepsilon$, o kai $n \geqslant N_2$, tai $|z_n - a| \leqslant \varepsilon$. Imkime $N = \max\{N^*, N_1, N_2\}$. Pradedant tuo numeriu, turėsime $|y_n - a| < \varepsilon$. Taigi $\{y_n - a\}$ – nykstamai mažėjanti seka. Teorema įrodyta.