

2. Sekos riba

Perėjimas prie ribos yra viena pagrindinių matematinės analizės operacijų. Ši operacija sutinkama analizėje įvairiomis formomis. Čia panagrinėsime paprasčiausią atvejį – skaičių sekos ribą.

2.1. Skaičių sekos

2.1.1. Skaičių sekos ir operacijos su jomis

Galima prisiminti šias iš mokyklos kurso žinomas skaičių sekas

- 1) aritmetinės ir geometrinės progresijos narių sekas,
- 2) taisyklingų n – kampių, įbrėžtų į duotąjį apskritimą perimetrų seką,
- 3) realaus skaičiaus $\sqrt{2}$ artinių seka $x_1 = 1, x_2 = 1.4, x_3 = 1.41, \dots$

Pateiksime skaičių sekos apibrėžimą.

2.1. Apibrėžimas. Jei kiekvienam natūraliajam skaičiui $n \in \mathbb{N}$ pagal tam tikrą taisyklę priskiriamas realusis skaičius x_n , tai sunumeruota skaičių aibė

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

vadina realiųjų skaičių seka arba tiesiog seka.

Skaičiai x_n vadinami **(1) sekos elementais** arba **nariais**. Sutrumpintai **(1)** seką žymėsime $\{x_n\}$. Pavyzdžiui, simboliu $\{\frac{1}{n}\}$ žymėsime seką $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, o simboliu $\{1 + (-1)^n\}$ – seką $0, 2, 0, 2, \dots$

Išsime aritmetines operacijas su sekomis.

Tegul turime sekas $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ir $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$. Šių sekų suma vadinsime seką

$$x_1 + y_1, \quad x_2 + y_2, \quad \dots, \quad x_n + y_n, \quad (\text{arba} \quad \{x_n + y_n\}),$$

skirtumu – seką

$$x_1 - y_1, \quad x_2 - y_2, \quad \dots, \quad x_n - y_n, \quad (\text{arba} \quad \{x_n - y_n\}),$$

sandauga – seką

$$x_1 \cdot y_1, \quad x_2 \cdot y_2, \quad \dots, \quad x_n \cdot y_n, \quad (\text{arba} \quad \{x_n \cdot y_n\}),$$

dalmeniui (santykiui) – seką

$$\frac{x_1}{y_1}, \quad \frac{x_2}{y_2}, \quad \dots, \quad \frac{x_n}{y_n}, \quad (\text{arba} \quad \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}).$$

Apibrėžiant santykį $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ reikia reikalauti, kad visi sekos $\{y_n\}$ elementai būtų nelygūs nuliui. Tačiau jeigu sekoje $\{y_n\}$ nuliu virsta baigtinis elementų skaičius, tai santykį $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ galima apibrėžti pradedant tuo numeriu, kada visi tolesni y_n jau nelygūs 0.

2.2. Aprėžtos ir neaprėžtos sekos

2.2. Apibrėžimas. Seka $\{x_n\}$ yra vadinama aprėžta iš viršaus (apačios), jeigu egzistuoja toks realusis skaičius M (skaičius m), kad kiekvienas sekos elementas x_n tenkina nelygybę $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$).

Šiame apibrėžime minimas skaičius M (skaičius m) yra vadinamas sekos $\{x_n\}$ viršutiniu (apatiniu) rėžiu, o nelygybė $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) – sekos aprėžtumo iš viršaus (apačios) sąlyga.

Pažymėsime taip pat, kad bet kuri aprėžta iš viršaus (apačios) seka turi be galo daug viršutinių (apatinių) rėžių.

2.3. Apibrėžimas. Sakykime, kad seka $\{x_n\}$ aprėžta, jeigu ji aprėžta iš viršaus ir iš apačios, t.y. jeigu egzistuoja skaičiai m ir M tokie, kad bet kuris šios sekos elementas tenkina nelygybes

$$m \leq x_n \leq M.$$

Jeigu seka $\{x_n\}$ aprėžta, o M ir m – jos viršutinis ir apatinis rėžiai, tai visi šios sekos elementai tenkina nelygybę

$$(2) \quad |x_n| \leq A,$$

čia $A = \max \{|M|, |m|\}$.

Atvirkščiai, jeigu visi sekos $\{x_n\}$ elementai tenkina (2) nelygybę, tai teisingos nelygybės

$$-A \leq x_n \leq A$$

ir todėl seka aprėžta. Taigi (2) nelygybė – tai kita sekos aprėžtumo sąlygos forma.

2.4. Apibrėžimas. Seka $\{x_n\}$ vadinama neaprėžta, jei kiekvienam teigiamam skaičiui A galima nurodyti tokį sekos narį x_n , kuris tenkina nelygybę

$$|x_n| > A.$$

Panagrinėsime kai kuriuos pavyzdžius.

1) Seka $-1, -4, -9, \dots, -n^2, \dots$ aprėžta iš viršaus ir neaprežta iš apačios. Šios sekos viršutiniu rėžiu galima laikyti bet kurių skaičių, ne mažesnių už -1 .

2) Seka $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ aprėžta.

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad 0 < \frac{1}{n} \leq 1, \quad \text{kai } n \in \mathbb{N}.$$

3) Seka $1, 2, 1, 3, 1, 4, \dots, 1, n, 1, (n+1), \dots$ neaprežta.

2.3. Nykstamai mažėjančios ir neaprežtai didėjančios sekos

2.5. Apibrėžimas. Sakoma, kad seka $\{x_n\}$ neaprežtai didėja, jeigu kiekvienam teigiamam skaičiui A galima nurodyti tokį numerį N , kad visi sekos elementai x_n tenkina nelygybę $|x_n| > A$, kai $n \geq N$.

Iš pateikto apibrėžimo turime, kad $N = N(A)$. Kiekviena neaprežtai didėjanti seka yra neaprežta, tačiau atvirkščias teiginys neteisingas. Praeitame poskyryje 3) pavyzdyje nelyginiams elementams sąlyga $|x_n| > A$ neišpildoma.

2.6. Apibrėžimas. Sakoma, kad seka $\{x_n\}$ nykstamai mažėja, jeigu bet kiam teigiamam ε , kiek mažas jis bebūtų, galima nurodyti tokį numerį N , kad visi šios sekos elementai x_n tenkina nelygybę $|x_n| < \varepsilon$, kai tik $n > N$.

Pastebėsime, kad šiame apibrėžime apskritai $N = N(\varepsilon)$.

Panagrinėsime kai kuriuos pavyzdžius.

1) Įrodysime, kad geometrinės progresijos narių seka $q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots$ neaprežtai didėja, kai $|q| > 1$ ir nykstamai mažėja, kai $|q| < 1$.

Imkime $|q| > 1$. Tada $|q| = 1 + \delta$, kur $\delta > 0$. Pasinaudoję Niutono binomo formule, gausime

$$|q|^N = (1 + \delta)^N = 1 + \delta N + (\text{teigiami nariai}).$$

Iš čia gauname

$$(3) \quad |q|^N > \delta N.$$

Fiksuokime bet kurių skaičių $A > 0$ ir parinkime tokį didelį numerį N , kad būtų teisinga nelygybė

$$\delta N > A$$

(Tai galima padaryti, imant $N = \left[\frac{A}{\delta}\right] + 1$)

Iš pastarosios nelygybės ir iš (3) nelygybės išplaukia nelygybė

$$|q|^N > A.$$

Kadangi kai $n \geq N$ ir $|q| > 1$ turime $|q|^n \geq |q|^N$, tai $|q|^n > |q|^N > A$, kai $n \geq N$. Taigi įrodėme, kad nagrinėjama seka yra neapbrėžtai didėjanti, kai $|q| > 1$.

Atvejis $|q| < 1$ nagrinėjamas analogiškai. Tada turime

$$\frac{1}{|q|} = 1 + \delta, \quad \delta > 0$$

Vėl pritaikę Niutono binomo formulę gausime

$$(3^*) \quad \frac{1}{|q|^N} \quad \text{arba} \quad |q|^N < \frac{1}{\delta N}$$

Pakartoję ankstesnio įrodymo paskutinius žingsnius, gausime, kad nagrinėjama seka yra nykstamai mažėjanti, kai $|q| < 1$.

2) Įrodysime, kad seka $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ nykstamai mažėja. Iš tikrųjų, jeigu $n \geq N$, tai $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$. Todėl duotajam $\varepsilon, \varepsilon > 0$ užtenka parinkti numerį N iš sąlygos $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Pavyzdžiui, galima tarti, kad $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$.

Toliau nykstamai mažėjančias sekas žymėsime mažosiomis graikiškomis raidėmis $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ir t.t.

2.4. Pagrindinės nykstamai mažų sekų savybės

2.1. Teorema. Dviejų nykstamai mažėjančių sekų suma yra nykstamai mažą seka.

Įrodymas. Tegul $\{\alpha_n\}$ ir $\{\beta_n\}$ – nykstamai mažėjančios sekos. Įrodysime, kad seka $\{\alpha_n + \beta_n\}$ nykstamai mažėjanti. Tegul ε – bet kuris teigiamas skaičius, o N_1 – numeris, kuriuo pradedant $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, o N_2 – numeris, kuriuo pradedant visi $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tokie numeriai N_1 ir N_2 egzistuoja pagal nykstamai mažėjančios sekos apibrėžimą. Kadangi turime $|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$, tai, pažymėję N didžiausią iš dviejų numerių N_1 ir N_2 , $N = \max\{N_1, N_2\}$, gausime, kad pradedant N išpildoma nelygybė $|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$.

Tai reiškia, kad seka $\{\alpha_n + \beta_n\}$ nykstamai mažėjanti. Teorema įrodyta.

2.2. Teorema. Dviejų nykstamai mažėjančių sekų skirtumas yra nykstamai mažėjanti seka.

Irodymas. analogiškas **2.1.** teoremos įrodymui.

Išvada. Baigtinio skaičiaus nykstamai mažėjančių sekų algebrinė suma yra nykstamai mažėjanti seka.

2.3. Teorema. Nykstamai mažėjanti seka yra aprėžta.

Irodymas. Tegul $\{\alpha_n\}$ – nykstamai mažėjanti seka, o ε – koks nors teigiamas skaičius. Toliau, tegul N – numeris, kuriuo pradedant $|\alpha_n| < \varepsilon$. Pažymėsime A didžiausią iš šių skaičių: $\varepsilon, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{n-1}|$. Tai galima užrašyti

$$A = \max\{\varepsilon, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{n-1}|\}.$$

Aišku, kad $|\alpha_n| \leq A$ prie visų n , o tai ir reiškia, kad seka aprėžta.

2.4. Teorema. Aprėžtos ir nykstamai mažėjančios sekų sandauga yra nykstamai mažėjanti seka.

Irodymas. Tegul $\{x_n\}$ – aprėžta, o $\{\alpha_n\}$ – nykstamai mažėjanti sekos. Kadangi seka $\{x_n\}$ aprėžta, tai egzistuoja skaičius $A > 0$ toks, kad bet kuris elementas x_n tenkina sąlygą $|x_n| \leq A$.

Imkime bet kurį teigiamą skaičių ε . Kadangi seka $\{\alpha_n\}$ nykstamai mažėjanti, tai teigiamam skaičiui $\frac{\varepsilon}{A}$ galima nurodyti tokį numerį N , kad kai $n \geq N$ būtų teisinga nelygybė $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$. Tada, kai $n \geq N$, turėsime

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon.$$

Taigi, seka $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ nykstamai mažėjanti.

Išvada. Bet kurio baigtinio skaičiaus nykstamai mažėjančių sekų sandauga yra nykstamai mažėjanti seka.

Pastaba. Dviejų nykstamai mažėjančių sekų santykis gali būti bet kurio tipo, gali būti ir neapibrėžtas.

2.5. Teorema. Jeigu visi nykstamai mažėjančios sekos $\{\alpha_n\}$ elementai yra lygūs vienam ir tam pačiam skaičiui c , tai $c = 0$.

Irodymas. Leidkime, $c \neq 0$. Tegul $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$, $\varepsilon \neq 0$. Pradedant numeriu N , atitinkančiu šį ε , išpildoma nelygybė $|\alpha_n| < \varepsilon$. Kadangi $\alpha_n = c$, $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$, tai

pastarąją nelygybę galima užrašyti taip: $|c| < \frac{|c|}{2}$, iš kur gauname $1 < \frac{1}{2}$. Taigi gavome prieštaravimą, todėl turi būti $c = 0$.

2.6. Teorema. Jeigu $\{x_n\}$ – neapbrėžtai didėjanti seka, tai, pradedant nuo tam tikro numerio n apibrėžta seka $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$, kuri yra nykstamai mažėjanti. Jeigu visi nykstamai mažėjančios sekos $\{\alpha_n\}$ elementai yra nelygūs nuliui, tai seka $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ – neapbrėžtai didėjanti.

Irodymas. Visų pirma pastebėsime, kad neapbrėžtai augančioje sekoje gali būti tik baigtinis lygių nuliui elementų skaičius. Tai reiškia, kad kai $n \geq N^*$ visi elementai nelygūs nuliui, todėl seka $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ turi prasmę, kai $n > N^*$. Įrodysime, kad $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – nykstamai mažėjanti seka.

Tegul ε – bet kuris teigiamas skaičius. Skaičiui $\frac{1}{\varepsilon}$ galima nurodyti numerį $N \geq N^*$ tokį, kad kai $n \geq N$ sekos $\{x_n\}$ elementai tenkina nelygybę $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. Todėl pradedant nurodytu numeriu N bus teisinga nelygybė $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$. Taigi įrodėme, kad $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ nykstamai mažėjanti.

Antrosios teoremos dalies įrodymas analogiškas.