3 Trečioji savaitė. Skaičių sekos ir jų ribos

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Taško aplinka. Skaičių sekos samprata.
2. Atskiras sekų atvejis – progresijos.
3. Sekos ribos apibrėžimas. Nykstančios ir neaprėžtai didėjančios sekos.
4. Teoremos apie sekas, turinčias ribą. Nykstančių sekų savybės.
5. Sekų ribų savybės. Aritmetinės operacijos su sekomis, turinčiomis ribą. Sekos ribos egzistavimo teorema.
6. Monotoninės sekos. Fundamentaliosios sekos.
7. Įdėtieji intervalai. Posekiai ir jų ribos.
8. Neapibrėžtumai. Sekų ribų formulės.

3.1 Taško aplinka. Skaičių sekos samprata

3.1 Apibrėžimas. Taško a ε-aplinka vadinamas intervalas $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Taško a ε-aplinka žymima $\mathcal{U}_a^\varepsilon$

Iš apibrėžimo matyti, kad taško a ε – aplinkai priklauso visos realiosios x reikšmės, kurioms teisinga nelygybė:

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

3.2 Apibrėžimas. Taško $x = +\infty$ ε-aplinka (žym. $\mathcal{U}_{+\infty}^\varepsilon$) vadinamas intervalas $(\varepsilon, +\infty)$.

3.3 Apibrėžimas. Taško $x = -\infty$ ε-aplinka (žym. $\mathcal{U}_{-\infty}^\varepsilon$) vadinamas intervalas $(-\infty, -\varepsilon)$.

Apibendrinę pastaruosius du apibrėžmus, turime, kad begalinio taško ε-aplinka (žym. $\mathcal{U}_\infty^\varepsilon$) vadinama intervalų $(-\infty, -\varepsilon)$ ir $(\varepsilon, +\infty)$ suma, t. y. aibė tokių realiųjų reikšmių x, kurioms teisinga nelygybė: $|x| > \varepsilon$.

3.4 Apibrėžimas. Funkciją $f(n) = x_n$, kuri kiekvienam natūraliajam skaičiui priskiria realųjį skaičių, vadiname skaičių seka. Funkcijos reikšmes $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ vadiname sekos nariais, o x_n – bendruoju sekos nariu.

Skaičių seką žymėsime $\{x_n\}$. Skaičių sekos gali būti pateikiamos užrašant sekos narių reikšmes, nurodant bendrojo sekos nario formulę arba pateikiant taisyklę, kuria vadovaujantis sudaroma skaičių seka.

3.2 Atskiras sekų atvejis – progresijos.

3.5 Apibrėžimas. Aritmetine progresija vadinama tokia skaičių seka, kurios visiems nariams teisinga lygybė:

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

čia $n \in N$, o d – pastovus skaičius – progresijos skirtumas.

Iš apibrėžimo matyti, kad kiekvienas progresijos narys gali būti apskaičiuojamas pagal formulę:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Aritmetinei progresijai nustatyti pakanka nurodyti jos pirmąjį narį ir progresijos skirtumą. n pirmųjų aritmetinės progresijos narių sumos formulė:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

3.6 Apibrėžimas. Geometrine progresija vadinama tokia skaičių seka, kurios visiems nariams teisinga lygybė:

$$b_{n+1} = b_n q,$$

čia $n \in N$, o q – pastovus skaičius – progresijos vardiklis.

Iš apibrėžimo matyti, kad kiekvienas progresijos narys gali būti apskaičiuojamas pagal formulę:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Norėdami nustatyti geometrinę progresiją turime nurodyti jos pirmąjį narį ir progresijos vardiklį. n pirmųjų geometrinės progresijos narių sumos formulė:

$$S_n = \frac{b_1 + b_n q}{1 - q}.$$

3.3 Sekos ribos apibrėžimas. Nykstančios ir neaprėžtai didėjančios sekos.

3.7 Apibrėžimas. Realųjį skaičių $a \in R$ vadiname skaičių sekos $\{x_n\}$ riba, jei kiekvienam teigiamam ε egzistuoja toks numeris $\mathcal{N} \in N$, kad su kiekvienu $n > \mathcal{N}$ tenkinama nelygybė:

$$| x_n - a | < \varepsilon.$$

Tuomet rašome

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

3.8 Apibrėžimas. Seka, kuri turi baigtinę ribą, vadinama konverguojančia. Nekonverguojančios sekos vadinamos diverguojančiomis.

3.9 Apibrėžimas. Seka $\{x_n\}$ vadinama nykstančia seka ir rašoma

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0,$$

jei kiekvienam teigiamam ε egzistuoja toks numeris $\mathcal{N} \in N$, kad su kiekvienu $n > \mathcal{N}$ tenkinama nelygybė:

$$| x_n | < \varepsilon.$$

3.10 Apibrėžimas. Skaičių seka $\{x_n\}$ vadinama neaprėžtai didėjančia, jei kiekvienam teigiamam E egzistuoja toks numeris $\mathcal{N} \in N$, kad su kiekvienu $n > \mathcal{N}$ tenkinama nelygybė:

$$| x_n | > E.$$

Rašome

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Jei kiekvienam teigiamam E egzistuoja toks numeris $\mathcal{N} \in N$, kad su kiekvienu $n > \mathcal{N}$ tenkinama nelygybė:

$$x_n > E,$$

tai

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Jei kiekvienam teigiamam E egzistuoja toks numeris $\mathcal{N} \in N$, kad su kiekvienu $n > \mathcal{N}$ tenkinama nelygybė:

$$x_n < -E,$$

tai

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

3.4 Teoremos apie sekas, turinčias ribą. Nykstančių sekų savybės.

3.1 Teorema. *Jei seka $\{x_n\}$ konverguoja į a, o $a > p$ ($a < q$), tai ir visi tos sekos nariai pradedant tam tikru numeriu $\mathcal{N}$ yra didesni (mažesni) už $p(q)$.*

Teorema su įrodymu.

3.2 Teorema. *Jei seka $\{x_n\}$ konverguoja į a, o $a > 0$ ($a < 0$), tai ir visi tos sekos nariai pradedant tam tikru numeriu $\mathcal{N}$ yra didesni (mažesni) už 0.*

Teorema su įrodymu.

3.3 Teorema. *Dviejų nykstančių sekų suma, skirtumas, sandauga yra nykstančios sekos.*

Teorema su įrodymu.

3.4 Teorema.

Aprėžtos ir nykstančios sekų sandauga yra nykstanti seka.

Teorema su įrodymu.

3.5 Teorema. *Jei visi nykstančios sekos elementai yra tarpusavyje lygūs, tai tokia seka sudaryta tik iš nulių.*

Teorema su įrodymu.

3.6 Teorema. *Jei seka $\{\alpha_n\}$ nyksta, tai seka $\{\frac{1}{\alpha_n}\}$ yra neaprėžtai didėjanti.*

Teorema su įrodymu.

3.5 Sekų ribų savybės. Aritmetinės operacijos su sekomis, turinčiomis ribą. Sekos ribos egzistavimo teorema.

3.7 Teorema. *Jei sekos $\{x_n\}$ riba yra skaičius a,o sekos $\{y_n\}$ – skaičius b ir su visais n $x_n = y_n$, tai lygios ir šių sekų ribos, t. y. $a = b$.*

Teorema su įrodymu.

3.8 Teorema. *Jei sekos $\{x_n\}$ riba yra skaičius a, o $c \in R$ ir egzistuoja toks numeris $\mathcal{N}$, kad su kiekvienu $n > \mathcal{N}$ tenkinama nelygybė $x_n \leqslant c$ ($x_n \geqslant c$), tai ir*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant c \quad \lim_{n\to\infty} x_n \geqslant c.$$

Teorema su įrodymu.

3.9 Teorema. *Jei sekos $\{x_n\}$ riba yra skaičius a,o sekos $\{y_n\}$ – skaičius b ir su visais n $x_n \geqslant y_n$, tai ir šių sekų ribos tenkina atitinkamą nelygybę, t. y. $a \geqslant b$.*

Teorema su įrodymu.

3.10 Teorema. *Jei sekos $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ konverguoja ir turi tą pačią ribą, t. y.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

ir egzistuoja toks numeris $\mathcal{N} \in N$, kad $x_n \leq z_n \leq y_n$, kai $n > \mathcal{N}$, tai tuomet ir seka $\{z_n\}$ turi tą pačią ribą, t. y.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Teorema su įrodymu.

3.11 Teorema. *Jei sekos $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ konverguoja, o*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

tai ir sekos

$$\{x_n + y_n\}, \quad \{x_n - y_n\}, \quad \{x_n \cdot y_n\}, \quad \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

konverguoja, o jų ribos yra

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

Teorema su įrodymu.

3.12 Teorema. ***Sekos ribos egzistavimo teorema.*** *Tarkime, kad seka $\{x_n\}$ konverguoja. Tuomet:*

1) egzistuoja vienintelė riba

$$\lim_{n\to\infty} x_n,$$

2) seka $\{x_n\}$ yra aprėžta.

Teorema su įrodymu.

Pastaba. Jei seka konverguoja, tai ji yra aprėžta, bet jei seka aprėžta, tai ji nebūtinai konverguoja.

3.6 Monotoninės sekos. Fundamentaliosios sekos

3.11 Apibrėžimas. Jei su visomis n reikšmėmis $x_n < x_{n+1}$ arba $x_n > x_{n+1}$, arba $x_n \leqslant x_{n+1}$, arba $x_n \geqslant x_{n+1}$, tai seka $\{x_n\}$ vadinama atitinkamai didėjančia, mažėjančia, nemažėjančia, nedidėjančia. Didėjančios, mažėjančios sekos dar vadinamos griežtai monotoninėmis.

Sekos monotoniškumą galima nustatyti dviem būdais:

1) tiriant santykį
$$\frac{x_n}{x_{n+1}}:$$
jei visiems n $\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1$, tai turime, kad $x_n > x_{n+1}$, o tai reiškia, kad seka yra mažėjanti;
jei visiems n $\frac{x_n}{x_{n+1}} < 1$, tai turime, kad $x_n < x_{n+1}$, o tai reiškia, kad seka yra didėjanti.

2) tiriant skirtumą
$$x_{n+1} - x_n:$$
jei visiems n $x_{n+1} - x_n > 0$, tai turime, kad $x_n < x_{n+1}$, o tai reiškia, kad seka yra didėjanti;
jei visiems n $x_{n+1} - x_n < 0$, tai turime, kad $x_n > x_{n+1}$, o tai reiškia, kad seka yra mažėjanti.

3.13 Teorema. ***Pagrindinė teorema apie motnotoninės sekos ribą.*** *Jei nemažėjanti (nedidėjanti) seka aprėžta iš viršaus (iš apačios), tai ji konverguoja.*

Teorema su įrodymu.

Pastaba. Konverguojanti seka nebūtinai yra monotoninė.

3.12 Apibrėžimas. Skaičių seka $\{x_n\}$ vadinama fundamentaliąja arba Koši seka, jei kiekvienam teigiamam ε egzistuoja toks numeris $\mathcal{N} \in N$, kad su kiekvienu $n > \mathcal{N}$ ir su kiekvienu $m > \mathcal{N}$ $(m \neq n)$ tenkinama nelygybė:
$$| x_m - x_n | < \varepsilon.$$
Tuomet rašome
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Fundamentaliosios sekos naudojamos norint ištirti sekų konvergavimą.

3.14 Teorema. *Seka konverguoja tada ir tik tada, kai ji yra fundamentali.*

Teorema su įrodymu.

3.7 Įdėtieji intervalai. Posekiai ir jų ribos

3.13 Apibrėžimas. Intervalų seka $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... yra vadinama įdėtųjų intervalų seka, jei:

1) kiekvienas intervalas yra įdėtas į prieš jį einantį intervalą, t. y. $a_n \leqslant a_{n+1}$, o $b_{n+1} \leqslant b_n$,

2) n- ojo intervalo ilgis artėja į 0, kai $n \to \infty$.

3.15 Teorema. *Kiekvienai įdėtųjų intervalų sekai egzistuoja vienintelis skaičius priklausantis visiems intervalams.*

Teorema su įrodymu.

3.14 Apibrėžimas. Jei turime seką $\{x_n\}$, tai iš jos išrinkę seką $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...$ tokią, kad $\{n_k\}$ yra didėjanti natūraliųjų skaičių seka $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$, gauname seką $\{x_{n_k}\}$, kuri vadinama sekos $\{x_n\}$ posekiu.

3.15 Apibrėžimas. Konverguojančios sekos $\{x_n\}$ posekio $\{x_{n_k}\}$ riba yra vadinama daline sekos riba.

3.16 Apibrėžimas. Skaičių sekos $\{x_n\}$ dalinė riba a yra vadinama sekos $\{x_n\}$ viršutine riba, jei kiekviena kita dalinė riba yra ne didesnė už a. Tuomet rašome

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a.$$

3.17 Apibrėžimas. Skaičių sekos $\{x_n\}$ dalinė riba b yra vadinama sekos $\{x_n\}$ apatine riba, jei kiekviena kita dalinė riba yra ne mažesnė už b. Tuomet rašome

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a.$$

Lema 1. *Jei seka konverguoja ir turi ribą lygią skaičiui a, tai ir kiekvienas tos sekos posekis konverguoja ir turi tą pačią ribą.*

3.16 Teorema. *Seka turi ribą tada ir tik tada, kai jos apatinė riba lygi viršutinei ribai.*

3.17 Teorema. ***Bolcano – Vejerštraso.*** *Iš kiekvienos aprėžtos sekos galima išskirti konverguojantį posekį.*

Teorema su įrodymu.

3.8 Neapibrėžtumai. Sekų ribų formulės

Ribų teorijoje gana dažna tokia situacija, kai aritmetinį reiškinį sudarančių atskirų reiškinių ribos yra žinomos, bet apie viso reiškinio ribą nieko konkretaus negalime pasakyti. Tokie atvejai vadinami neapibrėžtumais.

I.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

tačiau santykio $\frac{x_n}{y_n}$ riba, kai $n \to \infty$ gali būti lygi 0, ∞ arba neegzituoja. Todėl $\left(\frac{0}{0}\right)$ vadinamas neapibrėžtumu. Kiekvienu atveju rezultatas priklauso nuo konkrečių sekų $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$.

II.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty,$$

tačiau santykio $\frac{x_n}{y_n}$ riba, kai $n \to \infty$ neapibrėžta, t. y. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ neapibrėžtumas.

III.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty,$$

tačiau skirtumo $x_n - y_n$ riba, kai $n \to \infty$ neapibrėžta, t. y. $(\infty - \infty)$ neapibrėžtumas.

IV.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty,$$

tačiau sandaugos $x_n y_n$ riba, kai $n \to \infty$ yra neapibrėžta, t. y. $(0 \cdot \infty)$ neapibrėžtumas.

Pagrindinės skaičių sekų ribos:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e, \quad$ čia $\quad e \approx 2,718281828...$ – iracionalusis skaičius.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{q^n} = 0, \forall q > 1.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0.$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0, \forall k \in N, \forall a > 1.$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, \mid q \mid < 1.$

Jei c – bet koks baigtinis skaičius, o $f(n) \to \infty$, kai $n \to \infty$ tai:

1.

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{c} = \infty,$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{f(n)} = 0.$$