2 Antroji savaitė. Skaičių aibės

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Natūraliųjų skaičių aibė. Peano aksiomų sistema.
2. Matematinės indukcijos principas ir jo taikymas.
3. Sveikųjų skaičių aibė.
4. Racionaliųjų skaičių aibė.
5. Iracionalieji skaičiai. Realiųjų skaičių aibė.
6. Archimedo aksioma. Tiksliojo viršutinio (apatinio) rėžio aksioma.
7. Realiųjų skaičių savybės ir veiksmai. Dedekindo teorema. Intervalai. Absoliutinių dydžių savybės.

2.1 Natūraliųjų skaičių aibė. Peano aksiomų sistema

Skaičiaus sąvoka yra viena svarbiausių matematikos sąvokų. Natūralieji skaičiai nuolatos sutinkami kasdienėje veikloje ir savaime suprantami. Tačiau gana gražus ir aksiomatinis šios skaičių aibės apibrėžimas. Pažymėsime, kad tokių apibrėžimų yra ne vienas. Mes aptarsime Džiuzepės Peano aksiomų sistemą. 1891 m. paskelbta šio matematiko aksiomų sistema apibrėžianti natūraliuosius skaičius.

2.1 Apibrėžimas. Natūraliaisiais skaičiais vadiname kiekvienos netuščios aibės $\mathcal{N}$ elementus, jei aibėje apibrėžtas sąryšis „eina po“ turintis savybes:

1. Yra toks skaičius, kuris neina po jokio kito skaičiaus. Tai – 1.
2. Po kiekvieno skaičiaus eina vienas ir tik vienas skaičius.
3. Kiekvienas skaičius eina ne daugiau kaip po vieno skaičiaus.
4. Bet kuris aibės $\mathcal{N}$ poaibis M, kuriam teisingi šie teiginiai:

   a) $1 \in M$,

   b) jei $a \in M$, tai ir po jo einantis skaičius priklauso M,

   sutampa su aibe $\mathcal{N}$.

2.1 Teorema. *Peano aksiomų sistema apibrėžta natūraliųjų skaičių aibė yra begalinė.*

Teorema su įrodymu.

2.2 Matematinės indukcijos principas ir jo taikymas

Su natūraliųjų skaičių aibės savybėmis susijęs nuo antikos laikų žinomas matematinių teiginių įrodymo būdas – matematinė indukcija. Tačiau tiksli jos formuluotė priskiriama R. Dedekindui.

2.2 Apibrėžimas. Indukcija – tai perėjimas nuo dalinių teiginių prie bendrųjų.

2.3 Apibrėžimas. Dedukcija – tai perėjimas nuo bendrųjų teiginių prie dalinių.

Tokiu būdu, taikant indukciją norėtųsi patikrinti visus dalinius teiginius. Šiuo atveju indukcija vadinama *pilnąja indukcija.* Tačiau daugeliu atvejų pilnosios indukcijos taikymas yra komplikuotas. Tuomet taikoma nepilnoji indukcija, kuri negarantuoja, kad nebus padaryta klaidų. Daugelį matematinių teiginių galima įrodyti vadovaujantis vadinamuoju *matematinės indukcijos principu.*

2.2 Teorema. *Matematinės indukcijos principas.*
Teiginys $(\forall n \in \mathcal{N})\ T(n)$ *yra teisingas, jei:*

1) $T(1)$ *– teisingas,*

2) $(\forall k \in \mathcal{N})\ T(k) \Rightarrow T(k+1)$ *– teisingas teiginys.*

Teorema su įrodymu. $\mathcal{N}$ skaičių aibėje apibrėžiami du veiksmai: sudėtis ir daugyba.

2.4 Apibrėžimas. Natūraliųjų skaičių $n, m \in \mathcal{N}$ sudėtis apibrėžiama taip:

1) $n' = n + 1$,

2) $m + n' = (m + n)'$.

2.5 Apibrėžimas. Natūraliųjų skaičių $n, m \in \mathcal{N}$ daugyba apibrėžiama taip:

1) $m \cdot 1 = m$,

2) $m \cdot n' = mn + m$.

Tačiau vien tik natūraliųjų skaičių neužtenka.

2.3 Sveikųjų skaičių aibė

Sveikųjų skaičių aibę gauname praplėsdami natūraliųjų skaičių aibę tokiu būdu: $\mathcal{Z} = \mathcal{N}^- \cup 0 \cup \mathcal{N}$. Čia $\mathcal{N}$ – natūralieji skaičiai – vadinami , *sveikaisiais teigiamais skaičiais*, $\mathcal{N}^-$ – natūralieji skaičiai su minuso ženklu – vadinami *sveikaisiais neigiamais skaičiais* ir elementas 0 vadinamas *nuliu.*

2.6 Apibrėžimas. Sveikojo skaičiaus absoliutinis didumas (modulis) apibrėžiamas taip:
$$|m| = \begin{cases} m, & m \in \mathcal{N}; \\ 0, & m = 0; \\ n, & m = -n, n \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Sveikųjų skaičių aibėje taip pat apibrėžiamos dvi aritmetinės operacijos: sudėtis ir daugyba.

2.7 Apibrėžimas. Sudėtis:

1) jei $m, n \in \mathcal{N}$, tai $m + n$,

2) jei $m \in \mathcal{Z}$, o $n = 0$, tai $m + n = n + m = m$,

3) jei $n \in \mathcal{N}$, o $m \in \mathcal{N}^-$ ir $|m| < n$, tai $m + n = n + m = n - |m|$,

4) jei $n \in \mathcal{N}$, o $m \in \mathcal{N}^-$ ir $|m| > n$, tai $m + n = n + m = -(|m| - n)$,

5) jei $n \in \mathcal{N}$, o $m \in \mathcal{N}^-$ ir $m = n$, tai $m + n = n + m = 0$,

6) jei $n \in \mathcal{N}^-$ ir $m \in \mathcal{N}^-$, tai $m + n = n + m = -(|m| + |n|)$.

Norint dauginti sveikuosius skaičius pirmiausia įvedama skaičiaus ženklo sąvoka ir apibrėžiama, kaip reikia dauginti šiuos ženklus. Ženklu suprantamas + arba − prirašytas prieš natūralųjį skaičių. Pažymėkime z_m skaičiaus $m \in \mathcal{Z}$ ženklą. Tuomet $z_m = +$, kai $m \in \mathcal{N}$, o $z_m = -$, kai $m \in \mathcal{N}^-$. Skaičiui 0 ženklas nepriskiriamas. Vadinasi kiekvienas sveikasis skaičius gali būti nustatomas ženklu ir skaičiaus moduliu, t. y. $m = z_m \cdot |m|$. Ženklų daugybai būdinga tai, kad sudauginę du vienodus ženklus visada gauname +, o sudauginę priešingus ženklus – −.

2.8 Apibrėžimas. Daugyba:

1) jei $m \in \mathcal{Z}$, tai $m \cdot 0 = 0$,

2) jei $m, s \in \mathcal{Z}$ ir $m \neq 0, \quad s \neq 0$, tai $m \cdot s = (z_m \cdot z_s) \cdot |m||s|$.

Tačiau net ir turėdami sveikuosius skaičius dar negalime išspręsti daugelio uždavinių. Atsiranda poreikis praplėsti sveikųjų skaičių aibę. Taip atsiranda racionalieji skaičiai.

2.4 Racionaliųjų skaičių aibė

Sudarykime aibę $\mathcal{Q} = \left\{\frac{m}{n}, \quad m \in \mathcal{Z}, n \in \mathcal{N}\right\}$, kurios elementus vadinsime trupmenomis. Sutarta trupmenas $\frac{m_1}{n_1}$ ir $\frac{m_2}{n_2}$ laikyti lygiomis, jei $m_1 n_2 = m_2 n_1$, ir visas lygias trupmenas žymėti vienu racionaliuoju skaičiumi.

2.3 Teorema. *Racionaliųjų skaičių aibė yra tiršta.*

Teorema su įrodymu. Racionaliųjų skaičių $(a, b, c \in \mathcal{Q})$ aibės elementų savybės:

1) $a + b = b + a$,

2) $ab = ba$,

3) $(a + b) + c = a + (b + c)$,

4) $(ab)c = a(bc)$,

5) $(a + b)c = ac + bc$,

6) $ac = bc$, o $c \neq 0$, tai $a = b$,

7) jei $a < b$, tai $a + c < b + c$,

8) jei $a < b$, o $c > 0$, tai $ac < bc$.

Racionaliųjų skaičių aibės vis dar neužtenka.

2.5 Iracionalieji skaičiai. Realiųjų skaičių aibė

Remdamiesi Dedekindo pjūvių teorija įvedame iracionaliuosius skaičius.

2.9 Apibrėžimas. Racionaliųjų skaičių aibės $\mathcal{Q}$ suskirstymas į dvi netuščias aibes A ir V vadinamas pjūviu, jei:

1) kiekvienas racionalusis skaičius patenka į vieną iš dviejų sudarytųjų aibių,

2) kiekvienas aibės A skaičius yra mažesnis už bet kurį aibės V skaičių.

Tuomet aibė A vadinama apatine, o aibė V – viršutine pjūvio klasėmis.

2.10 Apibrėžimas. Racionaliųjų skaičių aibės $\mathcal{Q}$ pjūviai, kurių apatinė klasė neturi didžiausio elemento, o viršutinė klasė neturi mažiausio elemento yra vadinami iracionaliaisiais skaičiais.

Tokiu būdu iracionalieji skaičiai tarsi įterpiami tarp visų apatinės ir visų viršutinės pjūvio klasių elementų. Realiųjų skaičių aibė apima racionaliuosius ir iracionaliuosius skaičius, t. y. $\mathcal{R} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{I}$. Realiųjų skaičių aibė sutvarkoma vadovaujantis šiomis taisyklėmis:

1) $\alpha = \beta$, jei sutampa skaičių α ir β pjūviai,

2) $\alpha > \beta$, jei skaičiaus α apatinis pjūvis apima visą skaičiaus β apatinį pjūvį ir su juo nesutampa.

Realiųjų skaičių aibėje teisingos tokios teoremos (su įrodymais):

2.4 Teorema. *Jei $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, tai $\alpha = \beta$ arba $\alpha < \beta$, arba $\alpha > \beta$.*

2.5 Teorema. *Jei $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$ ir $\alpha > \beta$, o $\beta > \gamma$, tai $\alpha > \gamma$.*

2.6 Archimedo aksioma. Tiksliojo viršutinio (apatinio) rėžio aksioma

2.6 Teorema. *Koks bebūtų skaičius $a > 0$, egzistuoja $n \in \mathcal{N}$, kuris yra didesnis už a.*

Nagrinėkime netuščią realiųjų skaičių aibės poaibį A.

2.11 Apibrėžimas. Jei visiems $x \in A$ egzistuoja $\alpha \in \mathcal{R}$ toks, kad $x \leqslant \alpha$, tai α yra vadinamas aibės A viršutiniu rėžiu.

2.12 Apibrėžimas. Jei egzistuoja aibės viršutinis rėžis, tai ji vadinama aprėžta iš viršaus.

2.13 Apibrėžimas. Jei visiems $x \in A$ egzistuoja $\beta \in \mathcal{R}$ toks, kad $x \geqslant \beta$, tai β yra vadinamas aibės A apatiniu rėžiu.

2.14 Apibrėžimas. Jei egzistuoja aibės apatinis rėžis, tai ji vadinama aprėžta iš apačios.

2.15 Apibrėžimas. Aibė vadinama aprėžta, jei ji yra aprėžta ir iš viršaus, ir iš apačios.

2.16 Apibrėžimas. Jei α – aibės A viršutinis rėžis, o bet kuris kitas viršutinis rėžis α_1 yra toks, kad $\alpha_1 \geqslant \alpha$, tai α vadinamas aibės A tiksliuoju viršutiniu rėžiu.

2.17 Apibrėžimas. Jei β – aibės A apatinis rėžis, o bet kuris kitas apatinis rėžis β_1 yra toks, kad $\beta_1 \leqslant \beta$, tai β vadinamas aibės A tiksliuoju apatiniu rėžiu.

2.7 Teorema. *Tiksliojo viršutinio (apatinio) rėžio teorema.*
Jei aibė A aprėžta iš viršaus (iš apačios), tai ji turi tikslųjį viršutinį (apatinį) rėžį.

Teorema su įrodymu.

2.7 Realiųjų skaičių savybės ir veiksmai. Dedekindo teorema. Intervalai. Absoliutinių dydžių savybės.

1 lema. *Tarp dviejų realiųjų skaičių yra racionalusis skaičius.*

2 lema. *Jei $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ ir su visais $\varepsilon > 0$ tenkina nelygybes*

$$r \leqslant \alpha \leqslant r', \quad r \leqslant \beta \leqslant r',$$

čia $r, r' \in \mathcal{Q}$ ir $r' - r < \varepsilon$, tai skaičiai α ir β yra lygūs.

2.8 Teorema. *Dedekindo teorema.*
Bet kuriam realiųjų skaičių aibės pjūviui pjūvio taškas yra realusis skaičius, kuris yra:

1) arba didžiausias apatinėje klasėje,

2) arba mažiausias viršutinėje klasėje.

Realiųjų skaičių veiksmai.
Tarkime, kad turime du realiuosius skaičius α ir β:

$$a < \alpha < a', \quad b < \beta < b',$$

čia $a, a', b, b' \in \mathcal{Q}$.

2.18 Apibrėžimas. Skaičių α ir β sudėties operacija apibrėžiama taip:

$$a + b < \alpha + \beta < a' + b',$$

o skaičius $\alpha + \beta$ vadinamas realiųjų skaičių α ir β suma.

2.19 Apibrėžimas. Skaičių α ir β daugybos operacija apibrėžiama taip:

$$ab < \alpha\beta < a'b',$$

o skaičius $\alpha\beta$ vadinamas realiųjų skaičių α ir β sandauga.

Kai kurios sudėties operacijos savybės:

1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,

2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$,

3) $\alpha + 0 = \alpha$,

4) $\alpha + (-\alpha) = 0$,

5) jei $\alpha > \beta$, tai $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

Kai kurios daugybos operacijos savybės:

1) $\alpha\beta = \beta\alpha$,

2) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$,

3) $\alpha \cdot 1 = \alpha$,

4) $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$,

5) jei $\alpha > \beta$ ir $\gamma > 0$, tai $\alpha\gamma > \beta\gamma$.

Keletas nelygybių su moduliais:

1) $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$,

2) $|\alpha - \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$,

3) $|\alpha + \beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|$,

4) $||\alpha| - |\beta|| \leqslant |\alpha - \beta|$.