13 Tryliktoji savaitė. KELIŲ KINTAMŲJŲ FUNKCIJOS LOKALIEJI EKSTREMUMAI. DIFERENCIJUOJAMOS FUNKCIJOS BESĄLYGINIAI EKSTREMUMAI.

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Kelių kintamųjų funkcijos ekstremumai. Būtinosios ekstremumo egzistavimo sąlygos.
2. Pakankamosios kelių kintamųjų funkcijos ekstremumo egzistavimo sąlygos. Dviejų kintamųjų funkcijos atvejis.
3. Kelių kintamųjų funkcijos didžiausios ir mažiausios reikšmės nuatatymas uždaroje srityje.

13.1 Kelių kintamųjų funkcijos ekstremumai. Būtinosios ekstremumo egzistavimo sąlygos.

Tarkime, kad funkcija $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra apibrėžta aibėje $D \subset R^n$, taškas $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ – vidinis tos aibės taškas. Pažymėkime $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, o $M_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$.

13.1 Apibrėžimas. Taškas M_0 vadinamas funkcijos $u = f(X)$ ekstremumo tašku, jei egzistuoja tokia šio taško aplinka, kad visiems aplinkos taškams $f(X) \geqslant f(M_0)$ (M_0 – minimumo taškas) arba $f(X) \leqslant f(M_0)$ (M_0 – maksimumo taškas).

Šis apibrėžimas reiškia, kad egzistuoja pakankamai maža taško M_0 aplinka, kurioje funkcijos pokytis $\Delta u = f(X) - f(M_0)$ yra pastovaus ženklo.

13.1 Teorema. ***Būtina ekstremumo egzistavimo sąlyga.***
Jei taškas M_0 yra funkcijos $u = f(X)$ ekstremumo taškas ir šiame taške egzistuoja baigtinės dalinės funkcijos išvestinės visų kintamųjų atžvilgiu, tai jos visos lygios 0, t.y.

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}_{M_0} = 0.$$

Teorema su įrodymu.

Kaip matome daugelio kintamųjų funkcijos atveju, įtartini taškai (jie vadinami stacionariaisiais taškais) yra tie funkcijos apibrėžimo srities taškai, kuriuose visos funkcijos dalinės išvestinės lygios nuliui. Šiuos taškus galime surasti spręsdami lygčių sistemą:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases}$$

Dviejų kintamųjų funkcijos atveju, stacionariųjų taškų nustatymui sudaroma sistema, kuri geometriškai reiškia reikalavimą, kad ekstremumo taškuose liečiamoji plokštuma turi būti lygiagreti xOy plokštumai.

Pastaba. Jei yra taškų, kuriuose viena arba kelios dalinės išvestinės yra begalinės arba neegzituoja, o likusios lygios nuliui, tai tokius taškus taip pat turime įtraukti į įtartinų taškų sąrašą.

13.2 Pakankamosios kelių kintamųjų funkcijos ekstremumo egzistavimo sąlygos. Dviejų kintamųjų funkcijos atvejis.

Tarkime, kad funkcija $u = f(X)$ apibrėžta, tolydi ir turi tolydžiąsias pirmosios ir antrosios eilės dalines išvestines stacionariojo taško M_0 aplinkoje. Sudarome funkcijos pokytį

$$\Delta u = f(X) - f(M_0).$$

Funkciją $f(X)$ skleidžiame Teiloro eilute taške M_0 iki antrosios eilės išvestinių ir gauname

$$\Delta u = \frac{1}{2}\left(f''_{x_1x_1}\Delta x_1^2 + f''_{x_2x_2}\Delta x_2^2 + ... + f''_{x_nx_n}\Delta x_n^2 + 2f''_{x_1x_2}\Delta x_1\Delta x_2 + 2f''_{x_1x_3}\Delta x_1\Delta x_3 + \right.$$
$$\left. ... + 2f''_{x_{n-1}x_n}\Delta x_{n-1}\Delta x_n, \right.$$

čia $\Delta x_i = x_i - x_i^0$, o visos išvestinės skaičiuojamos taške $(x_1^0 + \theta\Delta x_1, ..., x_n^0 + \theta\Delta x_n)$, $0 < \theta < 1$. Pažymėkime

$$\Delta u = \sum_{i,k=1}^{n} f''_{x_ix_k}\Delta x_i\Delta x_k,$$

$$f''_{x_ix_k}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = a_{ik},$$

$$f''_{x_ix_k}(x_1^0 + \theta\Delta x_1, x_2^0 + \theta\Delta x_2, ..., x_n^0 + \theta\Delta x_n) = a_{ik} + \alpha_{ik},$$

čia $\alpha_{ik} \to 0$, kai $\Delta x_1 \to 0$, ..., $\Delta x_n \to 0$. Taigi turime, kad

$$\Delta u = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_i\Delta x_k + \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\Delta x_i\Delta x_k.$$

Gautosios sumos pirmasis dėmuo – antrasis funkcijos diferencialas nagrinėjamame taške. Tai – antrojo laipsnio daugianaris kintamųjų Δx_1, ..., Δx_n atžvilgiu. Jis vadinamas šių kintamųjų kvadratine forma. Kvadratinė forma vadinama teigiamai apibrėžta, jei ji yra teigiama su visomis kintamųjų reikšmėmis (visos kintamųjų reikšmės vienu metu negali būti lygios nuliui). Be to, nagrinėjama kvadratinė forma yra simetrinė, nes $f''_{x_ix_k} = f''_{x_kx_i}$.

Kalbėdami apie kvadratinės formos apibrėžtumą vadovausimės Silvesterio kriterijumi. Kvadratinė forma yra teigiamai apibrėžta, jeigu

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad ...,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Kvadratinė forma yra neigiamai apibrėžta, jeigu

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

kitas determinantas < 0 ir t. t.

13.2 Teorema. ***Pakankama ekstremumo egzistavimo sąlyga.***
Jei antrasis funkcijos diferencialas, t. y. kvadratinė forma

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_i \Delta x_k,$$

čia $a_{ik} = f''_{x_i x_k}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ *yra teigiamai (neigiamai) apibrėžta, tai nagrinėjamosios funkcijos taškas* M_0 *yra minimumo (maksimumo) taškas.*

Sąlygos, kada ekstremumo nėra.

13.2 Apibrėžimas. Kvadratinė forma vadinama neapibrėžta, jei ji įgyja skirtingų ženklų reikšmes.

Tuo atveju, kai kvadratinė forma yra neapibrėžta, nagrinėjama funkcija taške M_0 ekstremumo neįgyja.

13.3 Apibrėžimas. Kvadratinė forma vadinama pusiau apibrėžta, jei jos reikšmė lygi nuliui ir tada, kai yra nelygių nuliui kintamųjų. Tokiais atvejais, kai kvadratinė forma yra pusiau apibrėžta ir tada, kai visos funkcijos antrosios eilės dalinės išvestinės taške M_0 lygios nuliui, tenka analizuoti aukštesnės eilės išvestines.

Dviejų kintamųjų funkcijos atvejis. Nagrinėkime dviejų kintamųjų funkciją $u = f(x,y)$. Tarkime, kad ši funkcija taško $M_0(x_0, y_0)$ aplinkoje yra apibrėžta, tolydi ir turi tolydžiąsias pirmosios ir antrosios eilės dalines išvestines. Taškas M_0 – funkcijos stacionarusis taškas, t. y. jam galioja būtinosios ekstremumo egzistavimo sąlygos

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Norėdami išsiaiškinti, ar minėtasis stacionarusis taškas yra funkcijos ekstremumo taškas, vadovaujamės teorema apie pakankamą ekstremumo egzistavimo sąlygą, t. y. sudarome kvadratinę formą:

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(f''_{xx}\Delta x^2 + 2f''_{xy}\Delta x\Delta y + f''_{yy}\Delta y^2\right),$$

čia $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, o išvestinės skaičiuojamos taške $(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$, $0 < \theta < 1$. Išvestines taške (x_0, y_0) pažymime

$$a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad a_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Tuomet

$$f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) = a_{11} + \alpha_{11},$$
$$f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) = a_{12} + \alpha_{12},$$
$$f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) = a_{22} + \alpha_{22},$$

čia $\alpha_{11} \to 0$, $\alpha_{12} \to 0$, $\alpha_{22} \to 0$. Sudarome kvadratinę formą:

$$a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}\Delta y^2.$$

Šis kvadratinis trinaris yra pastovaus ženklo, kai jo diskriminantas

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0.$$

Be to $a_{11}a_{22} > 0$, t. y. abu koeficientai yra to paties ženklo. Todėl prisiminę maksimumo ($f(X) < f(M_0)$, t. y. $\Delta < 0$) ir minimumo ($f(M_0) < f(X)$, t. y. $\Delta > 0$)apibrėžimus, gauname, kad dviejų kintamųjų funkcija taške M_0 įgyja ekstremumą, jei

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0.$$

Kai $a_{11} < 0$, tai funkcija įgyja maksimumą, o kai $a_{11} > 0$ – minimumą. Tais atvejais, kai

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0,$$

taškas M_0 nėra funkcijos ekstremumo taškas. Kai

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0,$$

tai reikalingas platesnis funkcijos tyrimas, t. y. funkcijos skleidinyje Teiloro eilute turime pridėti funkcijos trečiosios eilės dalines išvestines.

13.3 Kelių kintamųjų funkcijos didžiausios ir mažiausios reikšmės nuatatymas uždaroje srityje.

Tarkime, kad funkcija $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra apibrėžta ir tolydi uždaroje aprėžtoje aibėje $D \subset R^n$. Be to, šios aibės taškuose (galbūt išskyrus baigtinį tam tikrų taškų skaičių) funkcija turi baigtines dalines išvestines. Tuomet remiantis Vejerštraso teorema, ši funkcija aibėje D įgya ir savo didžiausiąją bei savo mažiausiąją reikšmes. Tuo atveju, kai didžiausioji (mažiausioji) funkcijos reikšmė įgyjama vidiniame aibės D taške, tas taškas yra funkcijos ekstremumo taškas. Tačiau savo didžiausiąją (mažiausiąją) reikšmę funkcija gali įgyti ir aibės D kraštiniuose taškuose.

Siekiant nustatyti funkcijos didžiausiąją (mažiausiąją) reikšmę uždaroje srityje, reikia surasti visus ekstremumo taškus ir juose apskaičiuoti funkcijos reikšmes, o taip pat reikia apskaičiuoti ir funkcijos reikšmes kraštiniuose aibės taškuose. Tuomet visas apskaičiuotas reikšmes reikia palyginti ir iš jų išrinkti didžiausią (mažiausią) reikšmę.