10 Dešimtoji savaitė. DAUGELIO KINTAMŲJŲ FUNKCIJOS. DAUGIAMATĖ ERDVĖ. RIBINĖS REIKŠMĖS

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. n – matės erdvės sąvoka.
2. Metrinė erdvė. Euklidinė erdvė.
3. Taškų aibės ir jų aplinkos.
4. n – matės erdvės taškų sekos.
5. Daugelio kintamųjų funkcijos apibrėžimas. Funkcijos ribos sąvoka. Kartotinės ribos.

10.1 n – matės erdvės sąvoka

Nagrinėjome tik vieno kintamojo funkcijas, kurios atspindi vieno kurio nors dydžio priklausomybę nuo kito. Dabar dėmesį skirsime kelių kintamųjų funkcijų analizei, t. y. nagrinėsime tokias funkcijas, kai vienas dydis yra priklausomas nuo kelių kitų dydžių, pavyzdžiui, stačiakampio plotas priklauso nuo stačiakampio ilgio a ir pločio b, t. y. $S = ab$; kūno kinetinė energija yra priklausoma nuo kūno masės m ir nuo to kūno greičio v, t. y. $E_k = \frac{mv^2}{2}$ ir pan.

Stebėdami įvairius fizikinius procesus dažnai susiduriame su tokiomis situacijomis, kai tam tikro kūno savybes turime vertinti atsižvelgdami į situaciją tam tikruose taškuose, pavyzdžiui įkaitinto strypo temperatūra kiekviename jo taške, strypo tankis kiekviename taške ir pan. Tokiais atvejais mes nagrinėjame trijų kintamųjų, t.y. taško padėtį nustatančių dydžių funkcijas $f(x, y, z)$. Jei bėgant laikui kinta stebimo kūno charakteristikos, tai turime jau keturių kintamųjų funkciją $u(x, y, z, t)$.

Vieno, dviejų, trijų, keturių kintamųjų funkcijas mes dar galime įsivaizduoti ir interpretuoti, tačiau didesnio kintamųjų skaičiaus atveju geometrinė ir fizikinė interpretacija nėra aiški. Tačiau analizėje yra naudojami didesnio už 3 kintamųjų skaičiaus funkcijų apibendrinimai.

10.1 Apibrėžimas. Sutvarkytas realiųjų skaičių rinkinys $(x_1, x_2, ..., x_n)$, čia $x_i \in R$, $i = 1, 2, ..., n$ yra vadinama n – mačiu tašku. Skaičiai x_i, $i = 1, 2, ..., n$ – taško koordinatės.

10.2 Apibrėžimas. Visų n – mačių taškų aibė vadinama n – mate erdve R^n.

10.2 Metrinė erdvė. Euklidinė erdvė.

Tam tikroje aibėje apibrėžkime funkciją $\rho(x, y)$, tenkinančią savybes:

1)
$$\rho(x, y) \geqslant 0,$$

2)
$$\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y,$$

3)
$$\rho(x, y) = \rho(y, x),$$

4)

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Tokiu būdu apibrėžta funkcija yra vadinama metrika.

10.3 Apibrėžimas. Aibė, kurioje apibrėžta metrika, vadinama metrine erdve.

n – matėje erdvėje metriką apibrėžkime taip:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},$$

čia $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

10.4 Apibrėžimas. Erdvė R^n su tokiu būdu apibrėžta metrika, vadinama euklidine erdve.

10.3 Taškų aibės ir jų aplinkos.

10.5 Apibrėžimas. Imkime $\epsilon > 0$. Tuomet aibė $B(a,\epsilon) = \{x \in R^n | \rho(x,a) < \epsilon\}$ vadinama taško a ϵ – aplinka.

Kaip taško a ϵ – aplinka gali būti apibrėžiamas ir stačiakampis gretasienis n – matėje erdvėje.

Nagrinėkime n – matės erdvės R^n taškų aibę D. Apibrėšime svarbiausias sąvokas.

10.6 Apibrėžimas. Aibės D taškas vadinamas vidiniu aibės tašku, jei jis priklauso minėtai aibei kartu su tam tikra pakankamai maža savo aplinka.

10.7 Apibrėžimas. Aibė, sudaryta tik iš vidinių taškų, vadinama atvira aibe.

10.8 Apibrėžimas. Aibės D taškas vadinamas išoriniu aibės tašku, jei jo aplinkoje nėra nei vieno aibės D taško.

10.9 Apibrėžimas. Aibės D taškas M_0 vadinamas ribiniu tašku, jei kiekvienoje šio taško aplinkoje yra bent vienas aibės D taškas, nesutampantis su tašku M_0.

10.10 Apibrėžimas. Aibės D taškas vadinamas kraštiniu aibės tašku, jei jo aplinkoje yra ir aibės D taškų, ir taškų, nepriklausančių aibei D.

Kraštiniai aibės taškai sudaro jos kraštą.

10.11 Apibrėžimas. Aibė, kuriai priklauso visi kraštiniai taškai, vadinama uždara aibe.

10.12 Apibrėžimas. Aibės D taškas vadinamas izoliuotu aibės tašku, jei jo aplinkoje nėra nei vieno aibės D taško, išskyrus jį patį.

10.13 Apibrėžimas. Aibė D vadinama jungiąja, jei bet kurie du šios aibės taškai gali būti sujungti laužte taip, kad visi jos taškai priklausytų aibei D.

10.4 n – matės erdvės taškų sekos.

10.14 Apibrėžimas. Erdvės R^n taškų seka $\{x_m\} = \{(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, ..., x_n^{(m)})\}$ vadinama konverguojančia, jei

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \mathcal{N} \in N) : \rho(x_m, a) < \epsilon, \quad m > \mathcal{N}.$$

Skaičius a vadinamas sekos riba ir rašoma

$$\lim_{m \to \infty} x_m = a,$$

čia $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Kitais žodžiais sakant, erdvės R^n taškų seka konverguoja į tašką a, jei atstumas tarp sekos taškų ir minėtojo taško pradedant tam tikru numeriu $\mathcal{N}$ yra pakankamai mažas.

10.1 Teorema. *Euklidinės erdvės R^n taškų M_m seka konverguoja į šios erdvės tašką $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ tada ir tik tada, kai erdvės taškų M_m atitinkamų koordinačių sekos konverguoja į atitinkamas taško A koordinates, t. y.*

$$\{x_1^{(m)}\} \to a_1, ..., \{x_n^{(m)}\} \to a_n.$$

Teorema su įrodymu.

10.15 Apibrėžimas. Erdvės R^n taškų M_m seka $\{M_m\}$ yra vadinama fundamentalia, jei

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \mathcal{N} \in N) : \rho(M_{m+p}, M_m) < \epsilon, \quad m > \mathcal{N}(\epsilon), \quad p \in N.$$

10.2 Teorema. ***Koši kriterijus sekoms.*** *Erdvės R^n taškų seka $\{M_m\}$ konverguoja tada ir tik tada, kai ji yra fundamentali.*

10.16 Apibrėžimas. Erdvės R^n taškų seka $\{M_m\}$ vadinama aprėžta, jei egzistuoja toks baigtinis skaičius a, kad visi minėtosios sekos nariai priklauso sferai $B(0, a)$.

10.5 Daugelio kintamųjų funkcijos apibrėžimas. Funkcijos ribos sąvoka. Kartotinės ribos.

10.17 Apibrėžimas. Kelių kintamųjų funkcija – tai atvaizdavimas, kuris kiekvienam aibės $D \subset R^n$ taškui $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ pagal tam tikrą taisyklę priskiria realųjį skaičių u t. y. $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Ši funkcija – n kintamųjų funkcija. Aibė D vadinama funkcijos apibrėžimo sritimi.

10.18 Apibrėžimas. Dviejų kintamųjų funkcijos $u = f(x, y)$ taškai, kuriuose funkcija įgyja pastovią reikšmę, t. y. $f(x, y) = C$, čia C – konstanta, vadinami paviršiaus $u = f(x, y)$ lygio linijomis.

10.19 Apibrėžimas. Sakykime, kad kurioje nors m – matės erdvės taškų aibėje $\mathcal{P}$ yra apibrėžtos m kintamųjų funkcijos:

$$x_1 = \phi_1(t_1, t_2, ..., t_m), \quad x_2 = \phi_2(t_1, t_2, ..., t_m), \quad x_n = \phi_n(t_1, t_2, ..., t_m).$$

Tarkime, kad taškams $(t_1, t_2, ..., t_m)$ kintant aibėje $\mathcal{P}$, taškai $(x_1, x_2, ..., x_n)$ kinta n kintamųjų funkcijos $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ apibrėžimo srityje D. Tuomet funkcija u vadinama n kintamųjų sudėtine funkcija, t. y.

$$u = f(\phi_1(t_1, t_2, ..., t_m), \phi_2(t_1, t_2, ..., t_m), ..., \phi_n(t_1, t_2, ..., t_m)).$$

Tarkime, kad funkcija $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra apibrėžta srityje D, o taškas $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ – ribinis tos aibės taškas.

10.20 Apibrėžimas. Skaičius L vadinamas funkcijos $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ riba taške $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, jei

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) : |f(x_1, x_2, ..., x_n) - L| < \epsilon, \quad |x_1 - a_1| < \delta, ..., \quad |x_n - a_n| < \delta,$$

čia $(x_1, x_2, ..., x_n) \neq (a_1, a_2, ..., a_n)$. Rašome taip:

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = L.$$

Pažymėkime $M = (x_1, x_2, ..., x_n)$, tai tada galėsime rašyti

$$\lim_{M \to A} f(M) = L.$$

Pateiksime ir kitokią funkcijos ribos apibrėžimo pagal Koši formuluotę:

10.21 Apibrėžimas. Skaičius L vadinamas funkcijos $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ riba taške $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, jei

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) : |f(M) - L| < \epsilon, \quad \rho(M, A) < \delta.$$

Funkcijos ribos apinbrėžimas pagal Heinę:

10.22 Apibrėžimas. Skaičius L vadinamas funkcijos $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ riba taške $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, jei apibrėžimo srities D taškų M sekai $\{M_n\}$ konverguojant į A atitinkama funkcijos reikšmių seka $\{f(M_n)\}$ konverguoja į L.

Daugelio kintamųjų funkcijos ribos apibrėžimai pagal Koši ir pagal Heinę yra ekvivalentūs kaip ir vieno kintamojo funkcijos atveju.

10.3 Teorema. *Jei n kintamųjų funkcijos $f(M)$ ir $g(M)$, kai $M \to A$ turi atitinkamai ribas b ir c, tai ir funkcijos*

$$f(M) \pm g(M), \quad f(M) \cdot g(M), \quad \frac{f(M)}{g(M)}$$

turi ribas, kurios atitinkamai lygios

$$b \pm c, \quad b \cdot c, \quad \frac{b}{c}, \quad c \neq 0.$$

Šios teoremos įrodymas analogiškas vieno kintamojo funkcijos atitinkamos teoremos įrodymui. Analogiškai kaip ir vieno kintamojo atveju, galima apibrėžti, kada daugelio kintamųjų funkcijos riba lygi begalybei arba funkcijos ribą, kai argumentas artėja į begalybę.

Tačiau greta tokių ribų, kai visi argumentai artėja prie savo ribinių reikšmių, tenka nagrinėti ir tokias daugelio kintamųjų funkcijų ribas, kai tam tikra tvarka nuosekliai skaičiuojamos ribos atskirų kintamųjų atžvilgiu. Anksčiau aptartos funkcijų ribos vadinamos n

– lypėmis ribomis, o pastarosios – kartotinėmis ribomis. Kalbėdami apie kartotines ribas apsiribosime dviejų kintamųjų funkcijomis.

Tarkime, kad dviejų kintamųjų funkcija $f(x,y)$, apibrėžta aibėje D. Jei esant fiksuotai kintamojo y reikšmei skaičiuojame ribą, kai $x \to a$, tai rezultatas bus kintamojo y funkcija, t. y.

$$\lim_{x\to a} f(x,y) = \phi(y).$$

O vėliau mes galime ieškoti funkcijos $\phi(y)$ ribos, kai $y \to b$, t. y.

$$\lim_{y\to b} \phi(y) = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x,y).$$

Tokiu būdu mes jau sudarėme vieną iš dviejų galimų kartotinių dviejų kintamųjų funkcijos ribų. Antroji riba

$$\lim_{x\to a} \psi(x) = \lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x,y)$$

sudaroma analogiškai, t. y. pradžioje fiksuojamas kintamasis x. Tačiau nederėtų manyti, kad kartotinės ribos $\lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x,y)$ ir $\lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x,y)$ yra lygios. Gali nutikti netgi taip, kad viena iš kartotinių ribų yra baigtinė, o kita – neegzistuoja. Kita vertus, kaip tik dažniausiai ir yra naudojamos kartotinės ribos. Svarbi yra teorema nustatanti dvilypės ir kartotinės ribų ryšį.

10.4 Teorema. *Jei egzistuoja (baigtinė arba begalinė) dvilypė riba*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = L.$$

ir bet kuriam y egzistuoja baigtinė riba kintamojo x atžvilgiu

$$\phi(y) = \lim_{x\to a} f(x,y),$$

tai egzistuoja ir kartotinė riba

$$\lim_{y\to b} \phi(y) = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x,y),$$

kuri yra lygi dvilypei ribai.

Teorema su įrodymu.

Jei kartu su teoremos sąlygomis bet kuriam x egzistuoja baigtinė riba kintamojo y atžvilgiu

$$\psi(x) = \lim_{y\to b} f(x,y),$$

tai egzistuoja ir kartotinė riba

$$\lim_{x\to a} \psi(x) = \lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x,y),$$

kuri yra lygi dvilypei ribai, t. y. tik tokiu atveju abi kartotinės ribos yra lygios.