1 Pirmoji paskaita. SVARBIAUSIOS SĄVOKOS

1. Supažindinimas su dėstomu kursu. Svarbiausios kursą sudarančios dalys. Atsiskaitymų tvarka. Darbo organizavimas semestro metu.

2. Diferencialinių lygčių pavyzdžiai.

3. Diferencialinės lygties apibrėžimas. Sprendinio sąvoka.

4. Pirmosios eilės diferencialinės lygties apibrėžimas.

5. Krypčių laukas. Izoklinės. Koši uždavinys.

6. Pirmosios eilės diferencialinių lygčių sprendinių egzistavimo ir vienaties klausimai.

Diferencialinėmis lygtimis aprašoma daugelis gamtoje vysktančių reiškinių. Jos taikomos nagrinėjant įvairias matematikos, fizikos, biologijos, chemijos, ekonomikos ir kitų mokslų problemas. Prisiminkime paprasčiausius fizikos kurso faktus, kad greitis yra kelio išvestinė laiko atžvilgiu, o pagreitis yra greičio išvestinė laiko atžvilgiu. Nagrinėdami įvairias su dinamika susijusias problemas mes įvedame greičio sąvoką, pavyzdžiui populiacijos augimo greitis, medžiagos kiekio kitimo greitis cheminės reakcijos metu ir pan. Pavyzdžiui, fizikos kurse nagrinėdami radioaktyviosios medžiagos skilimo procesą mes galime sudaryti radioaktyvios medžiagos kiekio nustatymo bet kuriuo laiko momentu lygtį, jei žinoma, kad jos skilimo greitis yra proporcingas medžiagos kiekiui tuo laiko momentu. Šiuo atveju, rašysime, kad

$$\frac{dm(t)}{dt} = -km(t),$$

čia $m(t)$ – medžiagos kiekis laiko momentu t, o $k > 0$ – proporcingumo koeficientas (radioaktyviojo skilimo konstanta). Minuso ženklas dešinėje lygybės pusėje nurodo, kad nesuskilusios radioaktyviosios medžiagos kiekis bėgant laikui mažėja. Žvelgiant į ką tik užrašytą diferencialinę lygtį galima pagalvoti, kad nėra labai sunku sudaryti ir spręsti diferencialines lygtis. Tačiau tik nedaugeliu atvejų diferencialinės lygtys iš karto gali būti sprendžiamos integruojant. Nagrinėdami sudėtingesnius procesus, turime ir sudėtingesnius jų matematinius modelius (tuo pačiu ir diferencialines lygtis arba diferencialinių lygčių sistemas). Dažniausiai tokias diferencialines lygtis (lygčių sistemas) pradžioje tenka pertvarkyti, keisti paprastesnėmis, įvesti naujus kintamuosius ar pan. Ir net po pertvarkymų tik nedidelę dalį uždavinių galime išspręsti tiksliai. Daugeliu atvejų problemų sprendimui tenka pasitelkti apytikslius metodus. Tačiau šios knygos interesų objektas yra kelias nuo tam tikros problemos prie diferencialinio uždavinio ir to uždavinio analizė bei sprendimas. Nagrinėjamos problemos yra aprašomos diferencialinėmis lygtimis, kurios daugeliu atvejų turės tikslius sprendinius. Norėdami sudaryti ir tyrinėti diferencialines lygtis, turime būti susipažinę su pagrindinėmis sąvokomis, naudojamomis diferencialinių lygčių teorijoje. Todėl pirmasis knygos skyrius yra skirtas šių sąvokų pristatymui, o tolesniuose skyriuose nagrinėjamos atskiros diferencialinių lygčių grupės ir aptariami jų sprendimo metodai.

1.1 Apibrėžimas. Diferencialine lygtimi vadinama lygtis, kuri sieja laisvąjį kintamąjį, nežinomą to kintamojo funkciją ir jos išvestinę arba kelias išvestines.

Diferencialinėje lygtyje būtinai turi būti kuri nors funkcijos išvestinė (išvestinės), o laisvojo kintamojo arba (ir) nežinomos funkcijos lygtis gali ir neturėti. Galime parašyti tokį bendrąjį diferencialinės lygties pavidalą:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), ...y^{(n)}(x)\right) = 0, \tag{1.1}$$

čia x – laisvasis kintamasis, $y(x)$ – jo funkcija, o $y'(x), y''(x), ...y^{(n)}(x)$ – šios funkcijos išvestinės. Priklausomai nuo to, kuri aukščiausios eilės išvestinė įeina į nagrinėjamą diferencialinę lygtį, mes sakome, kad sprendžiame pirmosios, antrosios ir t. t. eilės diferencialinę lygtį. Tokiu būdu (1.1) yra n-tosios eilės diferencialinė lygtis.

1.2 Apibrėžimas. Diferencialinės lygties sprendiniai – tai funkcijos, kurias įrašę į (1.1) lygtį gauname tapatybę.

1.3 Apibrėžimas. Diferencialinės lygties sprendinio grafikas vadinamas integraline kreive.

Diferencialinės lygties sprendinys taip pat vadinamas integralu arba integraline kreive.

Dabar apibrėšime pirmosios eilės diferencialinę lygtį ir aptarsime jos sprendinius.

1.4 Apibrėžimas. Diferencialinė lygtis, siejanti laisvąjį kintamąjį x, jo funkciją $y(x)$ ir pirmąją funkcijos išvestinę $y'(x)$ vadinama pirmosios eilės diferencialine lygtimi. Jos bendrasis pavidalas:

$$F\left(x, y(x), y'(x)\right) = 0. \tag{1.2}$$

Nagrinėkime paprasčiausius (1.2) lygties atvejus, t. y. tokias diferencialines lygtis, kurios yra išspręstos išvestinės atžvilgiu:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.3}$$

čia $\dfrac{dy}{dx} = y'(x)$, o $y = y(x)$. Tai – normalioji diferencialinė lygtis.

Geometriškai remdamiesi šia lygtimi kiekvienam stačiakampės Dekarto koordinačių sistemos taškui (x, y), kuriame yra apibrėžta funkcija $f(x, y)$, priskiriame reikšmę $\dfrac{dy}{dx}$, kuri nustato funkcijos $f(x, y)$ liestinės kryptį taške (x, y) ($\mathrm{tg}\alpha = f(x, y)$, α – liestinės, nubrėžtos taške (x, y) sudaromas kampas su teigiama OX ašies kryptimi). Taip kiekviename taške mes sužinome liestinių kryptis, t. y. turime krypčių lauką. Todėl galime sakyti, kad spręsdami (1.3) lygtį mes ieškome tokios kreivės, kurios liestinės kryptis kiekviename taške sutampa su lauko kryptimi tame taške.

1.5 Apibrėžimas. Linijos, kurioms

$$f(x, y) = k,$$

čia k – konstanta, vadinamos izoklinėmis.

Vadinasi, kiekviename izoklinės taške lauko kryptis yra ta pati. Tuomet turėdami vieną tašką ir krypčių lauką, mes galime nubrėžti integralinę kreivę, einančią per duotąjį tašką. Tai yra geometrinis (1.3) diferencialinės lygties sprendimo būdas.

Dabar panagrinėkime atskirą (1.3) diferencialinės lygties atvejį:

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1.4}$$

Ši diferencialinė lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$dy = f(x)dx,$$

o tokią lygtį galime spręsti integruodami:

$$y(x) = \int f(x)dx + C, \tag{1.5}$$

čia C – bet kuri konstanta. Akivaizdu, kad (1.4) lygties sprendinys – funkcija $y(x)$ – nustatoma nevienareikšmiškai, t. y. diferencialinė lygtis bendru atveju turi be galo daug sprendinių. Tas pats pasakytina ir apie (1.2) diferencialinės lygties sprendinius. Apibendrindami galime pasakyti, kad pirmosios eilės diferencialinės lygties sprendiniai – integralinės kreivės – sudaro kreivių šeimą, priklausančią nuo vieno parametro C, t. y.

$$y = \psi(x, C). \tag{1.6}$$

1.6 Apibrėžimas. Sąlyga, nustatanti tašką (x_0, y_0), kuris turi priklausyti ieškomai integralinei kreivei, vadinama pradine arba Koši sąlyga. Ji gali būti užrašoma taip:

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.7}$$

arba

$$y_{|x=x_0} = y_0.$$

1.7 Apibrėžimas. Bendruoju pirmosios eilės diferencialinės lygties sprendiniu vadinama funkcija $y = \psi(x, C)$, kuri yra diferencialinės lygties sprendinys su bet kuria konstanta C, o kiekvienai pradinei sąlygai galima surasti tokią konstantos $C = C_1$ reikšmę, kad funkcija $y = \psi(x, C_1)$ tenkintų duotąją pradinę sąlygą.

1.8 Apibrėžimas. Funkcinis sąryšis

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

kuriuo užrašomas bendrasis (1.3) diferencialinės lygties sprendinys, vadinamas bendruoju integralu.

1.9 Apibrėžimas. (1.3) diferencialinės lygties sprendinys, gautas iš bendrojo sprendinio (arba bendrojo integralo) su fiksuota konstantos C reikšme yra vadinamas atskiruoju diferencialinės lygties sprendiniu (arba atskiruoju integralu).

Geometriškai atskirasis sprendinys reiškia vieną integralinę kreivę. Vadinasi, turėdami vieną tašką, mes galime rasti per jį einančią integralinę kreivę.

1.10 Apibrėžimas. Diferencialinis uždavinys, kai ieškome atskirojo (1.3) diferencialinės lygties sprendinio, tenkinančio (1.7) pradinę sąlygą , vadinamas Koši uždaviniu.

Išspręsti diferencialinę lygtį, tai rasti jos bendrąjį arba atskirąjį integralus (priklausomai nuo uždavinio sąlygos).

1.11 Apibrėžimas. Sprendinys, kurio negalima gauti iš bendrojo sprendinio, vadinamas ypatinguoju (1.3) diferencialinės lygties sprendiniu.

Ypatingieji sprendiniai atsiranda tais atvejais, kai nėra tenkinamos Koši teoremos sąlygos, t. y. kai pažeistos sąlygos, nustatančios sprendinio egzistavimą ir vienatį.

1.1 Lygties $y' = f(x, y)$ sprendinio egzistavimo ir vienaties klausimai

Šio skyriaus pradžioje mes nagrinėjome paprasčiausio pavidalo pirmosios eilės diferencialines lygtis, apibrėžėme jų sprendinius, tačiau neatsakėme į bene svarbiausius klausimus: kada tie sprendiniai egzistuoja, kas užtikrina, kad Koši uždavinio sprendinys bus vienintelis.

Šiame skyrelyje pateiksime atsakymus į šiuos klausimus.

1.1 Teorema. *Tegul diferencialinės lygties*

$$y' = f(x, y)$$

dešinės pusės funkcija $f(x, y)$ yra tolydi x ir y atžvilgiu uždaroje stačiakampėje plokštumos xOy srityje:

$$\mid x - x_0 \mid \leqslant a, \quad \mid y - y_0 \mid \leqslant b, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

o kintamojo y atžvilgiu toje srityje tenkina Lipšico sąlygą, t.y. egzistuoja toks skaičius $N > 0$, kad visiems x, kuriems $\mid x - x_0 \mid \leqslant a$, ir visiems y_1, y_2 tokiems, kad $\mid y_1 - y_0 \mid \leqslant b$, $\mid y_2 - y_0 \mid \leqslant b$ galioja nelygybė

$$\mid f(x, y_1) - f(x, y_2) \mid \leqslant N \mid y_1 - y_2 \mid .$$

Tada egzistuoja vienintelis diferencialinės lygties sprendinys $y = \phi(x)$, tenkinantis Koši sąlygą $\phi(x_0) = y_0$, apibrėžtas ir tolydus visiems x, kuriems $\mid x - x_0 \mid \leqslant h$; čia $h = min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$, o $\mid f(x, y) \mid \leqslant M$.

Ši teorema vadinama diferencialinės lygties $y' = f(x, y)$ sprendinio egzistavimo ir vienaties (arba Koši) teorema [12,14].

Pastaba. Teoremos formuluotėje minima Lipšico sąlygą visada tenkinama, jei dešinės pusės funkcija $f(x, y)$ turi apibrėžtą ir aprėžtą nagrinėjamoje srityje dalinę išvestinę f'_y, t.y.

$$\mid f'_y \mid \leqslant N, \quad N > 0.$$

Pastaba. Iš dešinės pusės funkcijos $f(x, y)$ tolydumo abiejų kintamųjų x ir y atžvilgiu uždaroje stačiakampėje plokštumos xOy srityje turime, kad funkcija yra aprėžta nagrinėjamoje stačiakampėje srityje, t.y. egzistuoja konstanta $M > 0$ tokia, kad

$$\mid f(x, y) \mid \leqslant M.$$

Jei funkcija $f(x, y)$ netenkina Lipšico sąlygos, tai teisinga vadinamoji sprendinio egzistavimo sąlyga – Peano teorema[12]:

1.2 Teorema. *Jei diferencialinės lygties*

$$y' = f(x, y)$$

funkcija $f(x, y)$ yra tolydi x ir y atžvilgiu uždaroje stačiakampėje plokštumos xOy srityje:

$$\mid x - x_0 \mid \leqslant a, \quad \mid y - y_0 \mid \leqslant b, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

tai intervale $\mid x - x_0 \mid \leqslant h$, $h = min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$ (iš funkcijos $f(x, y)$ tolygumo turime, kad $\mid f(x, y) \mid \leqslant M$, čia konstanta $M > 0$) egzistuoja bent vienas sprendinys $y = \phi(x)$, tenkinantis Koši sąlygą $\phi(x_0) = y_0$.

Atsižvelgę į Peano teoremos formuluotę, turime pastebėti, kad šiuo atveju sprendinys gali būti ir ne vienintelis. Be to gali būti ir ypatingųjų sprendinių.

Susipažinę su pagrindinėmis diferencialinių lygčių teorijoje naudojamomis sąvokomis, išsiaiškinę, kada Koši uždavinys turi vienintelį sprendinį, esame pasirengę susipažinti su pagrindinėmis diferencialinių lygčių grupėmis ir jų sprendinių nustatymo būdais.