3 užsiėmimas. Tiesinės n-osios eilės diferencialinės lygtys su pastoviais koeficientais

Homogeninė lygtis

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

kur a_n, a_{n-1}, $\ldots a_1$, a_0 – konstantos. Bendrojo sprendinio ieškosime pavidalu

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

kur y_1, y_2, $\ldots y_n$ – tiesiškai nepriklausomi atskirieji sprendiniai. Jie randami išsprendus algebrinę lygtį

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \ldots + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0$$

Tarkime, ši lygtis turi turi

a) m skirtingų realiųjų šaknų k_m, kiekvieną iš jų atitinka atskirasis sprendinys

$$y_m = e^{k_m x};$$

b) j vienodų realiųjų šaknų ($k_1 = k_2 = \ldots = k_j$), jas atitinka sprendiniai

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = x e^{k_1 x}, \quad \ldots \quad y_j = x^j e^{k_1 x};$$

c) kompleksines šaknis $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ kartotinumo t atitiks

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad y_2 = x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad \ldots y_t = x^{t-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x);$$

$$y_{t+1} = e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad y_{t+2} = e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad \ldots \quad y_{2t} = x^{t-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Pavyzdžiai

1. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$

Sudarome algebrinę lygtį ir randame jos šaknis:

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0, \quad k_1 = -1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 2$$

.

Šaknys yra realiosios ir skirtingos, todėl

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3e^{2x}.$$

2. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 0.$
Sudarome algebrinę lygtį ir randame jos šaknis:

$$k^3 - 7k^2 + 15k - 9 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = k_3 = 3$$

Šaknys yra realiosios ir

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{3x} + C_3xe^{3x}.$$

3. $y^{IV} - 16y = 0$
Sudarome algebrinę lygtį ir randame jos šaknis:

$$k^4 - 16 = 0, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 2i, \quad k_4 = -2i$$

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x.$$

4. $y^{IV} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$
Sudarome algebrinę lygtį ir randame jos šaknis:

$$k^4 - 4k^3 + 8k^2 - 8k + 4 = 0, \quad k_{1,2} = 1 \pm i, \quad \text{kartotinumo2}$$

$$y = C_1e^{x}\cos x + C_2e^{x}\sin x + C_3e^{x}x\cos x + C_4e^{x}x\sin x.$$

5. $y^6 + 2y^{IV} + y'' = 0$
Sudarome algebrinę lygtį ir randame jos šaknis:

$$k^6 + 2k^4 + k^2 = 0, \quad k_{1,2} = 0, \quad k_{3,4} = i, \quad k_{5,6} = -i;$$

$$y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)\cos x + (C_5 + C_6x)\sin x.$$

6. $y^8 + 2y^6 - 2y'' - y = 0$
Sudarome algebrinę lygtį ir randame jos šaknis:

$$k^8 + 2k^6 - 2k^2 - 1 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = k_4 = k_5 = i, \quad k_6 = k_7 = k_8 = -i$$

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (C_3 + C_4x + C_5x^2)\cos x + (C_6 + C_7x + C_8x^2)\sin x.$$

Nehomogeninė lygtis

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$$

Bendrąjį sprendinį randame pavidalu $Y = y_0 + y_a$, kur y_0 - homogeninės lygties sprendinys (homogeninę lygtį gauname, funkciją $f(x)$ pakeitus nuliu), o y_a galima rasti tokiu būdu:

A. Jeigu $f(x) = e^{ax}P_m(x)$, kur $P_m(x)$ – m-osios eilės daugianaris, tai $y_a = x^te^{ax}Q_m(x)$, kur $Q_m(x)$ – m-osios eilės daugianaris su nežinomais koeficientais, o t – šaknies a kartotinumas;

B. Jeigu $f(x) = e^{ax}\left(P_m(x)\cos(bx) + Q_t(x)\sin(bx)\right)$, tai

$y_a = x^re^{ax}\left(S_j(x)\cos(bx) + T_j(x)\sin(bx)\right)$, kur $j = \max(m,t)$, o $S_j(x)$ ir $T_j(x)$ – j-osios eilės polinomai su nežinomais koeficientais, o r – šaknies $\alpha \pm \beta i$ kartotinumas.

Pavyzdžiai

7. $y''' + y = e^{2x}(x^2 + x + 1)$

Pirmas žingsnis: Sprendžiame homogeninę lygtį $y''' + y = 0$.

$$k^3 + 1 = 0, \quad k_1 = -1, \quad k_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2},$$

$$y_0 = C_1e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}}\left(C_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

Antras žingsnis: Sudarome y_a:

Kadangi $f(x) = e^{2x}(x^2+x+1)$, tai $a \neq k_{1,2,3}$, $P_n(x) = x^2+x+1$ – antrosios eilės polinomas ir $y_a = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$. Randame išvestines:

$$\begin{aligned}
y_a' &= e^{2x}(2Ax + B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C);\\
y_a'' &= e^{2x}(2A + 8Ax + 4B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C);\\
y_a''' &= e^{2x}(12A + 24Ax + 12B + 8Ax^2 + 8Bx + 8C).
\end{aligned}$$

Įstatome išvestines į diferencialinę lygtį ir padaliname abi puses iš e^{2x}:

$$12A + 24Ax + 12B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{r|cc} x^2: & 9A = 1, & A = \frac{1}{9}; \\ x: & 24A + 9B = 1, & B = -\frac{5}{27}; \\ \text{const} & 12A + 12B + 9C = 1, & C = \frac{17}{81}. \end{array}$$

$$Y = y_0 + y_a = C_1 e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}} \left(C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + e^{2x}(\frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{27}x\frac{17}{81}).$$

8. $y''' + y' = x^4$.

Pirmas žingsnis: $k^3 + k = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_{2,3} = \pm i \; y_0 = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

Antras žingsnis: $f(x) = x^4 = e^{0\cdot x}x^4$, Kadangi $a = 0$ yra šaknis kartotinumo 1, o $P_n(x) = x^4$ – 4 -osios eilės polinomas, tai

$$y_a = x(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex$$

Diferencijuojame:

$$\begin{array}{l} y_a' = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E; \\ y_a'' = 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx + 2D; \\ y_a''' = 60Ax^2 + 24Bx + 6C. \end{array}$$

Įstatome išvestines į diferencialinę lygtį:

$$60Ax^2 + 24Bx + 6C + 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E = x^4$$

$$\begin{array}{r|cc} x^4: & 5A = 1, & A = \frac{1}{5}; \\ x^3: & 4B = 0, & B = 0; \\ x^2: & 60A + 3C = 0, & C = -4; \\ x: & 24B + 2D = 0, & D = 0; \\ \text{const} & 6C + E = 0, & E = 24. \end{array}$$

$$y_a = \frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 24x,$$

ir

$$Y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 24x.$$

9. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$.

Pirmas žingsnis: $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0, \quad k_{1,2,3} = 1, \quad y_0 = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$.

Antras žingsnis: Kadangi $f(x) = 2e^{1 \cdot x}$, $P_n(x) = 2 = const$, $a = 1$ – šaknis kartotinumo 3, tai $y_a = Ax^3e^x$.

Randame išvestines:

$$y'_a = (Ax^3 + 3Ax^2)e^x;$$
$$y''_a = (Ax^3 + 6Ax^2 + 6Ax)e^x;$$
$$y'''_a = (Ax^3 + 9Ax^2 + 18Ax + 6A)e^x.$$

Įstatome išvestines į diferencialinę lygtį ir padaliname iš e^x:

$$Ax^3 + 9Ax^2 + 18Ax + 6A - 3(Ax^3 + 6Ax^2 + 6Ax) + 3(Ax^3 + 3Ax^2) - Ax^3 = 2,$$

$$6A = 2, \quad A = \frac{1}{3}$$

ir

$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x + \frac{1}{3}x^3e^x$.

Užduotys savarankiškam darbui

1. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$;
2. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$;
3. $y''' - 3y' - 2y = 0$;
4. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$;
5. $y^{IV} - 81y = 0$;
6. $y^{IV} - 6y''' + 14y'' - 14y' + 5y = 0$;
7. $y^{(5)} + 4y^{IV} + y''' - 10y'' - 4y' + 8y = 0$;
8. $y^{(6)} + 8y^{IV} + 16y'' = 0$;
9. $y^{(8)} - y^{(6)} - 9y^{IV} - 11y'' - 4y = 0$;

10. $y^{(9)} + 2y^{(7)} + y^{(5)} = 0;$

11. $y''' - y'' + y' - y = (x+1)e^{2x};$

12. $y''' - 7y' + 6y = x^2;$

13. $y^{IV} - 8y''' + 23y'' - 28y' + 12y = x;$

14. $y^{IV} - 2y'' + y = -8e^{-x} + 8e^{x} + 12\sin x - 12\cos x;$

15. $y^{(5)} - y'' = x;$

16. $y^{(6)} + 3y^{IV} + 3y'' + y = 9\sin 2x;$

17. $y''' + 2y'' + 5y' = 4xe^{-x} - 68\cos 2x + x;$

18. $y^{IV} - 3y'' - 4y = x^2 + 1 + e^{3x} + 4\cos x.$