DEFORMUOJAMO KŪNO MECHANIKA

1 dalis

T U R I N Y S

1. Deformuojamojo kūno mechanikos objektas ir jos ryšys su kitais mokslais

Kontinuumo mechanika viena iš fizikos sudedamųjų dalių (1 pav.). Klasikinėje fizikoje mechanika arba kontinuumo mechanika nagrinėjama nepriklausomai nuo kitų jos skyrių kaip šilumos fizika, elektra, optika, fizinė medžiagotyra ir t. t.

Kontinuumu plačiąja prasme yra vadinama materiali sistema, nepertraukiamai pasiskirsčiusi erdvėje. Kontinuumas apima ne tik materialius kūnus, bet ir fizinius laukus. Dėl šios priežasties kontinuumo mechanika apima ne tik medžiaginių terpių mechaniką, bet ir įvairias tarp dalykines disciplinas – termomechaniką, elektromechaniką ir pan. Prie “grynai” mechaninių disciplinų priskiriamos aeromechanika (dujų mechanika), hidromechanika (skysčių mechanika) ir deformuojamojo kūno mechanika (DKM).

Taigi deformuojamas kūnas yra viena iš pagrindinių kontinuumo formų, o deformuojamojo kūno mechanika yra mokslas apie kūnų ir jų materialiųjų dalelių pusiausvyrą, judėjimą ir deformavimąsi. Kūnui deformuojantis keičiasi atstumai tarp jo taškų, kampai tarp linijų, paviršių plotai ir kūnų tūriai, materialias dalis siejančios jėgos. Deformavimosi dėl išorinių poveikių metu atsirandantys efektai, vadinami mechaniniais efektais.

Deformuojamas kūnas yra priešingybė teorinėje mechanikoje nagrinėjamam absoliučiai kietam kūnui, kuriam judant atstumai tarp jo taškų nesikeičia.

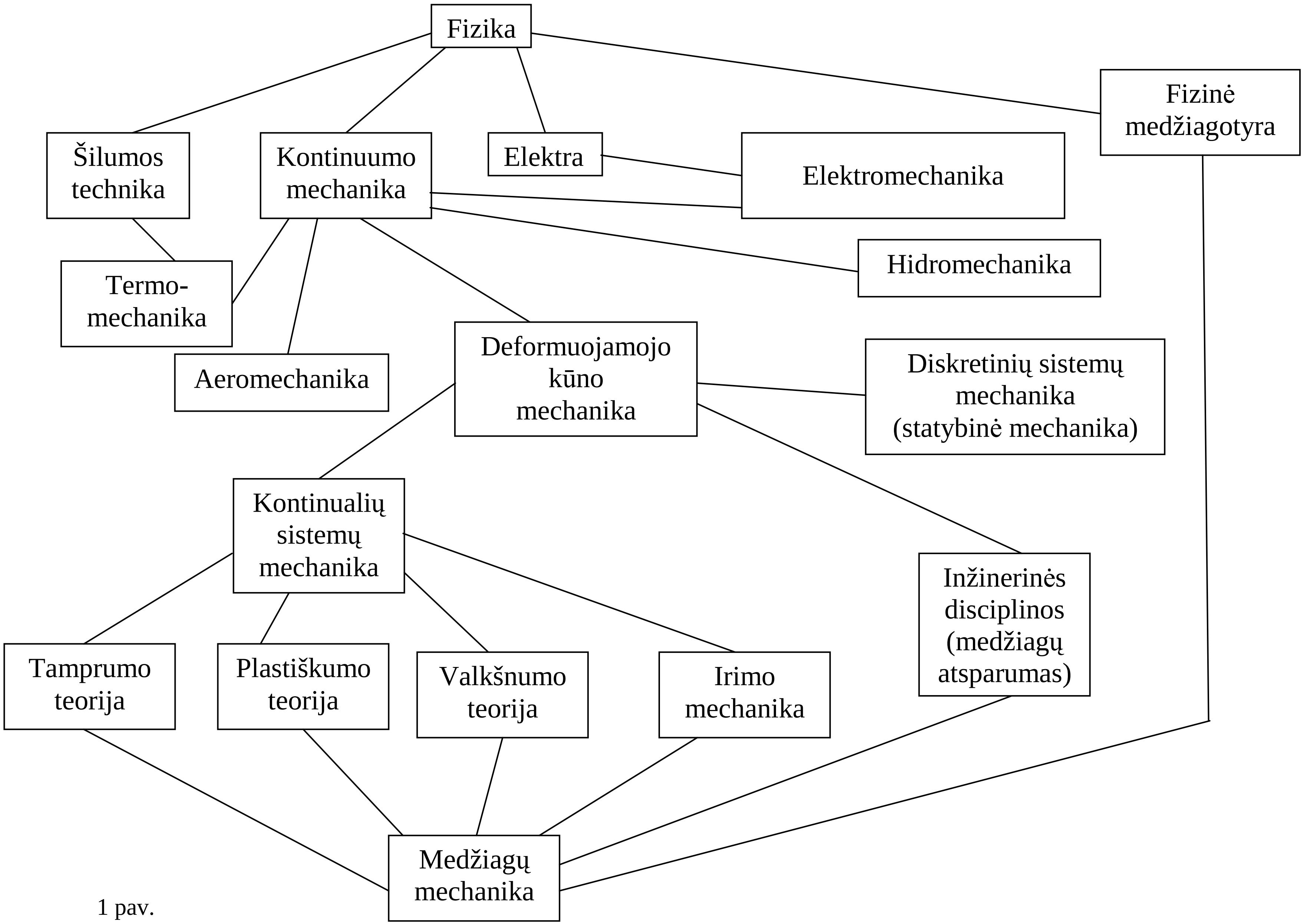
Kalbant apie mechanikos disciplinas ar jų skyrius, sutinkami du pavadinimai – matematinės ir taikomosios teorijos ar disciplinos. Matematinės teorijos skirtos bendriesiems dėsningumams aprašyti. Taikomosios teorijos įvertina papildomas prielaidas, supaprastina matematines teorijas ir yra skirtos konkrečių inžinerinių problemų sprendimui.

Priklausomai nuo nagrinėjamų reiškinių pobūdžio yra skiriamos determinuotos ir statistinės teorijos. Tradiciškai dominavo determinuotos teorijos, kurias mes ir nagrinėsime. Jos naudoja matematinės analizės metodus. Vis tik pastaraisiais metais vis didesnį vaidmenį vaidina statistinės teorijos, kurios paremtos tikimybiniais metodais.

Kontinualiųjų sistemų mechanika nagrinėja vientisą kūną, naudojant matematinės analizės metodus. Nagrinėjant be galo mažų matmenų diferencialinį elementą kontinualiųjų sistemų matematiniai modeliai aprašomi diferencialinėmis lygtimis. Priklausomai nuo kūno savybių išskiriamos tamprumo teorija, plastiškumo teorija, valkšnumo teorija, klampumo teorija ir kitos disciplinos. Pastaruoju metu vis svarbesnę vietą užima kūnų ir medžiagų irimą nagrinėjanti irimo mechanika.

Aprašant baigtinių matmenų kūnus, naudojami diskretinių sistemų mechanikos arba klasikinės statybinės mechanikos metodai, kurie aprašomi kompiuteriniams skaičiavimams labiau pritaikytais algebriniais modeliais. Šiuolaikiniai kompiuteriniai mechanikos ir matematinės fizikos modeliai daugiausia skirti kontinualiųjų sistemų diskretizacijai. Būtent funkcinių modelių išreiškimas algebrine forma ir algebrinių modelių sprendimas yra šio kurso objektas. Savitą DKM modelių ir metodų grupę sudaro inžinerinės disciplinos, skirtos mechanikos taikymams inžinerijoje.

Kontinualiųjų sistemų mechanikos pagrindas – diferencialinio elemento samprata, kurios pagalba aprašomi makrokūnai. Šiuolaikinėms technologijoms pasiekus neįtikėtiną pažangą, reikia operuoti ne tik mikrometrų, bet ir nanometrų dydžio medžiagos dalelėmis ar net pavieniais atomais, o į diskretinių sistemų modeliavimą įvesti atomines sąvokas. Būtent tomis sąvokomis operuoja moderni mechanikos sritis – medžiagų mechanika plačiąja prasme.


Fizika
Šilumos technika
Kontinuumo mechanika
Elektra
Elektromechanika
Fizinė medžiagotyra
Hidromechanika
Termo-mechanika
Aeromechanika
Deformuojamojo kūno mechanika
Diskretinių sistemų mechanika (statybinė mechanika)
Kontinualių sistemų mechanika
Inžinerinės disciplinos (medžiagų atsparumas)
Tamprumo teorija
Plastiškumo teorija
Valkšnumo teorija
Irimo mechanika
Medžiagų mechanika

1 pav.

2. Tamprumo teorijos sąvokos ir prielaidos

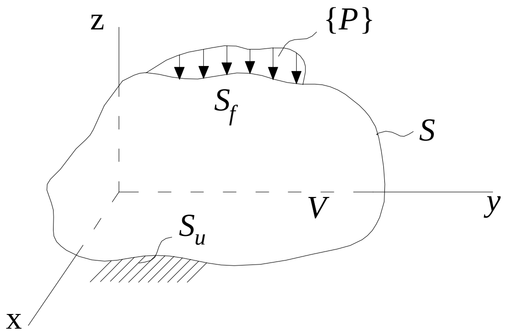
Kieto deformuojamo kūno mechanikos dalis nagrinėjanti kūnų tampriąsias savybes vadinama tamprumo teorija (TT). TT objektas – tamprus kūnas, kurio taškuose nustatomi įtempimai, deformacijos ir poslinkiai, sąlygojami žinomo poveikio. Kūnas laikomas tamprus, jeigu pašalinus išorinį poveikį jis sugrįžta į pirmykštį būvį.

Matematinės TT gimtadieniu priimta laikyti 1864 m., kai Navje paskelbė darbą, kuriame suformulavo TT lygčių sistemą. Pradžioje dominavo prancūzų mokslininkai. Be Navje, galima paminėti Klaiperoną, Puasoną, Sen-Venaną, Koší (Navier, Clapeyron, Cauchy, Poisson, Saint-Venant). Kai kurie iš jų dėstė Rusijoje, kur vėliau irgi susiformavo garsi mechanikos mokykla.

TT nagrinėja tik statikos apkrovas, t.y. neįvertinamos jėgos atsirandančios judant kūnui ir priklausančios nuo greičio ar pagreičio.

Nagrinėsime klasikinę TT. Tamprus kūnas (2 pav.) bus laikomas apibūdintu, jei žinome jo išorinio paviršiaus S lygtį, tūrį V, tvirtinimo sąlygas bei tamprumo savybes nusakančius dydžius (tamprumo modulis E, šlyties modulis G ir skersinės deformacijos (Puasono) koeficientas ν, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$)

Kūną veikiantys poveikiai gali būti išoriniai, pridedami paviršiuje S arba vidiniai, atsirandantys tūryje V. Paviršius S dalijamas į 2 dalis. Dalyje S_f



2 pav

pridedami jėgos poveikiai, o dalyje S_u judesio poveikiai. Nuliniai poveikiai gali būti nagrinėjami kaip atskiri atvejai: neapkrautas paviršius arba įtvirtintas paviršius.

Išorinės jėgos aprašomos:

paviršinėmis jėgomis $\{p\} \equiv \{p_x, p_y, p_z\}^T$, jų dimensija $\left[\frac{N}{m^2}\right]$.

ir tūrinėmis jėgomis $\{g\} \equiv \{g_x, g_y, g_z\}^T$ - $\left[\frac{N}{m^3}\right]$ (tai svorio arba inercijos jėgos).

Nagrinėsime nekintančias laike apkrovas.

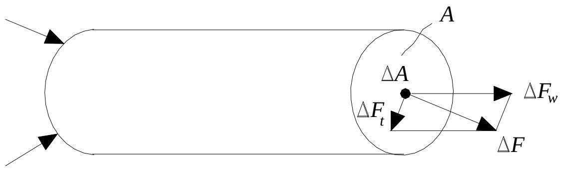
Pagrindinis TT uždavinys – nustatyti *įtempimus, deformacijas, poslinkius* (apie juos kalbėsime vėliau) kūno tūryje *V*, kai kūno paviršius *S*, jo medžiagos fizinės savybės, išorinis statinis poveikis (tūrinės bei paviršinės jėgos), tvirtinimo sąlygos yra žinomi. Pradiniai duomenys gali būti duoti ir kitokia forma, t.y. ant dalies kūno paviršiaus *S* vietoje išorinių paviršinių jėgų žinomi poslinkiai arba priklausomybė tarp poslinkių ir paviršinių jėgų ir panašiai.

Kūnams nagrinėti taikysime pjūvio metodą. Juo galima nustatyti pjūvyje veikiančias vidines jėgas. Be to, šis metodas leidžia vidines jėgas nagrinėti kaip išorines jėgas.

Trumpai apie vidines jėgas, įtempimą, poslinkius ir deformacijas.

Vidinės jėgos – tai papildoma kūno dalelių sąveika, atsirandanti nuo išorinių jėgų.

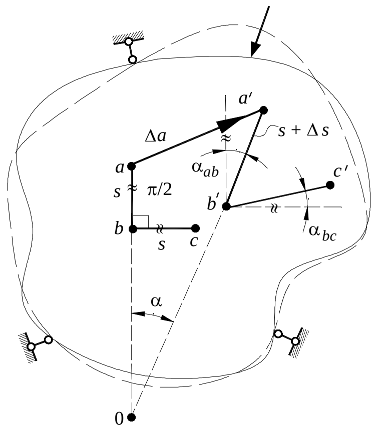
Įtempimas – vidinių jėgų intensyvumo matas. Tai yra vektorius, kurio kryptis tokia pati, kaip ties tuo tašku veikiančių vidinių jėgų, o didumas prilygsta vidutinei jėgai, tenkančiai ploto vienetui.



3 pav.

$\lim\limits_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = p$ – pilnutinis įtempimas, $\lim\limits_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \sigma$ – normalinis įtempimas, $\lim\limits_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} = \tau$ – tangentinis įtempimas, $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$.

Poslinkiai ir deformacijos (4 pav.)



4 pav.

Taško linijinis poslinkis - vektorius, kurio pradžia yra nedeformuoto kūno taške, o galas – deformuoto (vektorius *aa'*).

Atkarpos kampinis poslinkis - kampas tarp atkarpos krypties nedeformuotame kūne ir tos pačios atkarpos krypties jau deformuotame kūne (kampas α).

Linijinė deformacija ties kūno tašku kuria nors kryptimi – tos krypties atkarpos pokyčio santykis su pradiniu atkarpos ilgiu, kai tas ilgis nykstamai mažas.

$$\lim_{s\to 0}\frac{\Delta s}{s}=\varepsilon$$ – linijinė deformacija

Kampinė deformacija – kampo tarp dviejų statmenų nykstamai trumpų atkarpų pokytis.

$$\lim_{\substack{ab\to 0\\ bc\to 0}}\left(\angle abc-\angle a_1b_1c_1\right)=\gamma_{abc}$$ - kampinė deformacija.

Norint nustatyti įtempimų, deformacijų ir poslinkių nežinomas funkcijas, reikia disponuoti tam tikrų lygčių sistema. Tos lygtys turi susieti ieškomas funkcijas su pradiniais duomenimis, aprašančiais kūną ir jį veikiančias jėgas. Tai:

- pusiausvyros lygtys (algebrinės ir diferencialinės),
- geometrinės lygtys (diferencialinis ryšys tarp deformacijų ir poslinkių),
- fizikos (algebrinės) priklausomybės.

Prielaidos (principai)

1. *Medžiagos vientisumo prielaida (hipotezė).*

   Teigia, kad medžiaga užpildo kūną tolygiai be tuštumų. Ši prielaida leidžia aprašyti kūną tolydinėmis funkcijomis.

2. *Medžiagos vienalytiškumo prielaida.*

   Teigia, kad medžiagos savybės visuose kūno taškuose vienodos.

3. *Medžiagos izotropiškumo prielaida*.

   Teigia, kad medžiagos savybės visomis kryptimis yra vienodos.

4. *Medžiagos idealaus tamprumo prielaida*.

   Teigia, kad ryšys tarp apkrovų ir deformacijų yra grįžtamojo pobūdžio.

5. *Fizinio tiesiškumo prielaida (Huko dėsnis).*

   Teigia, kad ryšys tarp įtempimų ir deformacijų yra proporcingas.

6. *Geometrinio tiesiškumo prielaida*.

   Teigia, kad kūno santykiniai pailgėjimai maži, palyginti su vienetu, o linijiniai kūno taškų poslinkiai maži, palyginti su paties kūno matmenimis.

7. *Neįtempto pradinio būvio principas*.

   Teigia, kad prieš pridedant išorinius poveikius kūne nėra jokių vidinių jėgų.

8. *Nepriklausomo jėgų veikimo (superpozicijos) principas.*

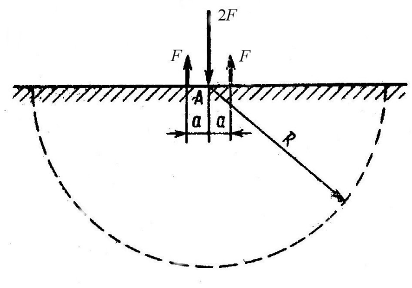
   Teigia, kad jėgų sistemos poveikio rezultatas lygus rezultatų nuo atskirų jėgų sumai.

9. *Pusiausvyrų išorinių jėgų lokalinio efekto (Sen – Venano) principas.*

   Yra dvi šio principo formuluotės:

   a) išorinių jėgų sąlygoti įtempimai ir deformacijos kūno taške, pakankamai nutolusiame nuo jėgų pridėjimo vietos, nepriklauso nuo jėgų sistemos pobūdžio, o priklauso tik nuo jėgų sistemos svarbiausiojo vektoriaus ir svarbiausiojo momento.

b) išorinės jėgos, veikiančios nedidelėje kūno paviršiaus ar kūno tūrio srityje ir būdamos statiškai ekvivalentiškos, sąlygoja įtempimus ir deformacijas, kurie tolstant nuo aptartos srities (nuo taško A, žr. 5 pav.) greitai mažėja ir atstumu didesniu už *R* lygus O.



5 pav.

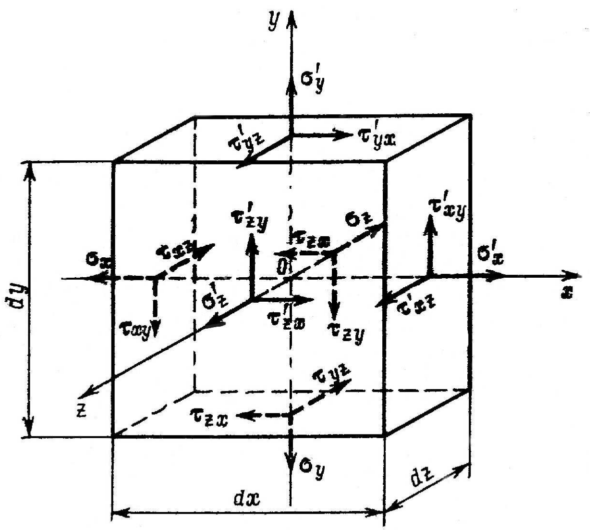
Sen-Venano principas nėra griežtai matematiškai, kiekybiškai pagrįstas, tačiau turimi sprendiniai ir eksperimentai visiškai pateisina jo teisingumą. Jis labai svarbus TT, ypač nagrinėjant sprendimo metodus.

3. Įtempimų būvio teorija

Įtempimų didumas bet kuriame apkrauto elemento taške priklauso nuo to, kaip orientuotas pjūvis, kuriame tie įtempimai nagrinėjami. Kaitaliodami pjūvio kryptį sudėtingai apkrautame elemente, ties vienu tuo pačiu tašku gautume įvairių įvairiausias įtempimų reikšmių kombinacijas. Bet kuriai šių kombinacijų nusakyti pakanka žinoti įtempimus kuriose nors trijose statmenose plokštumose ir nagrinėjamo pjūvio orientaciją tų plokštumų atžvilgiu (kampus tarp pjūvio ir tų plokštumų).

Įtempimų, veikiančių įvairiose visaip einančiose per apkrauto kūno tašką plokštumose, visuma yra vadinama įtempimų būviu ties tašku.

Ties nagrinėjamuoju apkrauto kūno tašku *k* statmenais ašims pjūviais, išpjauname be galo mažą stačiakampį gretasienį, kurio briaunų ilgis *dx*, *dy*, *dx* (6 pav.).



6 pav.

Bendru atveju visuose šešiuose šio gretasienio šonuose veikia po tris įtempimų komponentus (σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz} ir t.t.).

Kadangi atstumai tarp išpjauto gretasienio šonų yra nykstamai maži, priešinguose šonuose (nematomuose) veikia tokio pat didumo, tik priešingos krypties įtempimai (įtempimai pažymėti štrichu yra lygūs įtempimams be štricho). Taigi įtempimų būviui ties bet kuriuo tašku nusakyti reikia žinoti iš viso devynias įtempimų reikšmes. Įtempimų būvis gali būti aprašytas vektoriumi $\{\sigma\}$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}\}^T \tag{1}$$

arba įtempimų matrica $\tilde{\sigma}$, vadinama tenzoriumi (stulpeliuose vienodas yra pirmasis indeksas, kuris rodo normalės kryptį)

$$\tilde{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \tag{2}$$

Nesunku įrodyti, kad trys poros tangentinių įtempimų reikšmių yra tarpusavyje lygios:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} \qquad \text{(Tangentinių įtempimų dualumo dėsnis)} \tag{3}$$

Pvz: $\sum (M)_z = 0$. Įtempimai yra pasiskirstę visame gretasienio šono plote. Kadangi tas plotas yra nykstamai mažas, galima teigti, kad visuose kiekvieno šono taškuose įtempimai vienodi ir prilygsta taško *k* įtempimams. Todėl atstojamąsias gauname dauginant įtempimo komponentus iš to šono ploto

$\sigma_x dydz$, $\tau_{xy} dydz$, $\tau_{xz} dydz$ ir t.t.

Visos atstojamosios jėgos pridėtos prie gretasienio šonų centrų, todėl jėgos, kurios susidaro iš normalinių įtempimų, veikia poromis viena prieš kitą ir visiškai kompensuoja viena kitos poveikį. Tuo tarpu jėgos, kurios susideda iš tangentinių įtempimų, sukuria jėgų poras.

$$\sum (M)_z = 0, \qquad \tau_{xy} dydzdx - \tau_{yx} dxdzdy = 0 \qquad \text{arba} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Tangentinių įtempimų dualumo dėsnis

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

Dviejuose statmenose plokštumose tangentinių įtempimų komponentai, statmeni tų plokštumų susikirtimo briaunai ties tašku yra vienodo didumo ir nukreipti arba abu į briauną arba nuo jos

Įvertinant tangentinių įtempimų dualumo dėsnį (3) galime teigti, kad įtempimų būviui ties bet kuriuo tašku nusakyti reikia žinoti ne 9, bet 6 įtempimų reikšmes ir kad įtempimų tenzorius yra simetriškas pagrindinės diagonalės atžvilgiu.

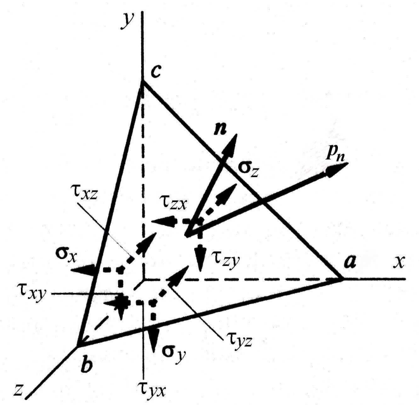
Tada įtempimų būvis gali būti aprašytas

vektoriumi
$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}^T \tag{4}$$

arba tenzoriumi
$$\tilde{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & & \text{sim} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} . \tag{5}$$

Be įtempimų statmenuose (normalinėse) ašims *x*, *y*, *z* aikštelėse, dažnai reikia žinoti įtempimus aikštelėse bet kaip orientuotose ašių *x*, *y*, *z* atžvilgiu.

Tam ties nagrinėjamuoju apkrauto kūno tašku *k* išpjauname be galo mažą tetraedrą (7 pav.).

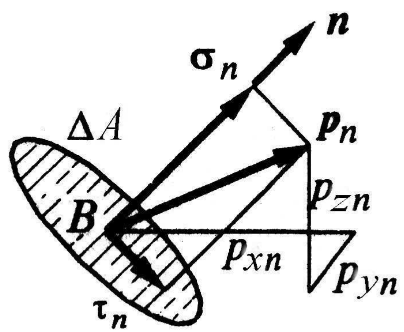


7 pav.

3 tetraedro plokštumos sutampa su koordinatinėmis plokštumomis, o ketvirtoji yra pasvirusi. Jos padėtis nusakoma normalės

$$\{n\} = \{n_x, n_y, n_z\}^T, \tag{6}$$

kur $n_x = \cos(n, x)$, $n_y = \cos(n, y)$, $n_z = \cos(n, z)$. $\underline{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1}$



8 pav.

Įtempimas bet kaip orientuotoje plokštumoje (8 pav.)

$$\{p_n\} = \{p_{nx},\ p_{ny},\ p_{nz}\}^T \tag{7}$$

Pusiausvyros lygtis: $\sum(F)_x = 0$, (neįvertinant tūrinių jėgų) $p_{nx}dA_n - \sigma_x dA_x - \tau_{yx}dA_y - \tau_{zx}dA_z = 0$,

kur $dA_x = n_x dA_n$, $dA_y = n_y dA_n$, $dA_z = n_z dA_n$, dA_n – bet kaip orientuotos plokštumos plotas.

Sutvarkę gauname $p_{nx} = n_x\sigma_x + n_y\tau_{yx} + n_z\tau_{zx}$. Analogiškai parašę kitas pusiausvyros lygtis gauname

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= n_x\sigma_x + n_y\tau_{yx} + n_z\tau_{zx} \\ p_{ny} &= n_x\tau_{xy} + n_y\sigma_y + n_z\tau_{zy} \\ p_{nz} &= n_x\tau_{xz} + n_y\tau_{yz} + n_z\sigma_z \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Matricinėje formoje $\{p\} = \tilde{\sigma}\cdot\{\mathrm{n}\}$ arba $\{p\} = [N]\cdot\{\sigma\}$ (9)

kur
$$N = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}$$

Lygtys (9) – tai tetraedro pusiausvyros <u>algebrinės lygtys</u>. Kairėje pusėje vietoje pilnojo įtempimo komponentų gali būti įrašomos paviršinės apkrovos.

Aikštelės, kuriose nėra tangentinių įtempimų, vadinamos <u>svarbiausiomis</u>. Normaliniai įtempimai, veikiantieji svarbiausioje aikštelėje vadinami <u>svarbiausiaisiais</u>.

Pasvirusioji aikštelė sutaps su svarbiausiąja, kai jos normalė sutaps su p_n t.y.

$\sigma_n = p_n$ (žr. 8 pav.), tada

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= p_n\cdot n_x = \sigma_n\cdot n_x \\ p_{ny} &= p_n\cdot n_y = \sigma_n\cdot n_y \\ p_{nz} &= p_n\cdot n_z = \sigma_n\cdot n_z \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

įrašę (10) į (8) ir pertvarkę gauname:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_n)n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z &= 0 \\ \tau_{xy}n_x + (\sigma_y - \sigma_n)n_y + \tau_{zy}n_z &= 0 \\ \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + (\sigma_z - \sigma_n)n_z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Šioje sistemoje nežinomieji σ_n, n_x, n_y, n_z. Vienu metu n_x, n_y, n_z negali būti lygūs nuliui nes $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. Lygtys (11) sudaro homogeninių lygčių sistemą, kuri turi nenulinį sprendinį, kai jos determinantas lygus nuliui

$$\det\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} = 0 \quad \text{t.y.}$$

$$(\sigma_x - \sigma_n)(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x - \sigma_n)\tau_{yz}^2 - (\sigma_y - \sigma_n)\tau_{zx}^2 - (\sigma_z - \sigma_n)\tau_{xy}^2 = 0 \tag{12}$$

Lygtis (12) – kubinė lygtis σ_n atžvilgiu, kurią galima užrašyti

$$\sigma_n^3 - \sigma_n^2 I_1 + \sigma_n I_2 - I_3 = 0 \tag{13}$$

kur $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$,

$$I_2 = \det\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{zy}^2,$$

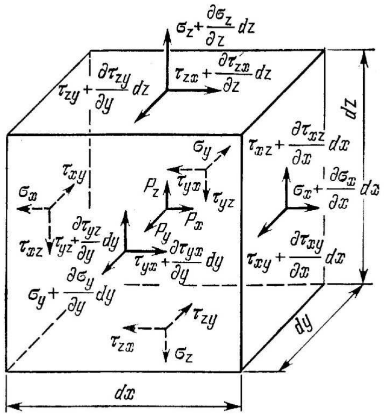
$$I_3 = \det\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.$$

Kubinės lygties (13) sprendiniai yra svarbiausieji įtempimai, kurie žymimi $\square_1 > \square_2 > \square_3$. Jie apskaičiuojami pagal tikslias Kardano formules, arba skaitiniu Niutono metodu.

4. Pusiausvyros diferencialinės lygtys

Rašant algebrines pusiausvyros lygtis (8) laikėme, kad įtempimai priešingose gretasienio plokštumose yra vienodi. Algebrinės lygtys leidžia įvertinti išorines apkrovas ir neįvertina tūrinių apkrovų.

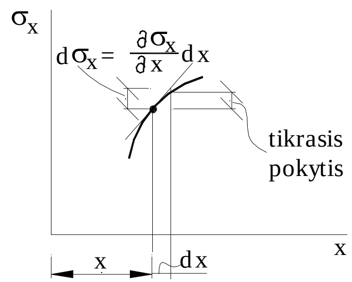
Dabar nagrinėjimą patiksliname, t.y. įvertiname įtempimų tenzoriaus elementų pokyčius kintant plokštumų koordinatėms (8 pav.).



8 pav.

Pokyčiams nustatyti naudojamasi Teiloro eilutės nariais, atmetus aukštesnių eilių savybes (9 pav.):

$$d\sigma_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx,$$



9 pav.

Užrašomos elemento, parodyto 8 pav., jėgų projekcijų sumų į ašis pusiausvyros lygtys:

Pavyzdžiui $\sum (F)_x = 0$,

$$-\sigma_x dydz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \tau_{yx} dxdz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dxdz - \tau_{zx} dxdz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) dxdy + g_x dV = 0$$

pertvarkę ir suprastinę iš $dV = dxdydz$ gauname $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + g_x = 0$.

Analogiškai parašę $\sum(F)_y = 0$ gauname $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + g_y = 0$, o parašę $\sum(F)_z = 0$ – $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z = 0$.

Tokiu būdu gauname diferencialines pusiausvyros lygtis

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + g_x = 0, \\ &\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + g_y = 0, \\ &\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

arba operatorine-matricine forma

$$\nabla\{\sigma\} + \{g\} = 0, \tag{16}$$

kur

$$\nabla = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix}$$ – diferencialinis operatorius.

Pusiausvyros lygtys (15) dar vadinamos Navjė (prancūzų matematikas, inžinierius Louis Navier, 1785-1836) vardu.

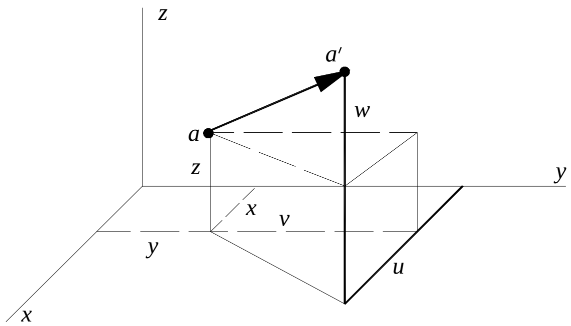
Šios diferencialinės pusiausvyros lygtys ir algebrinės pusiausvyros lygtys (9) leidžia paprastomis operacijomis (diferencijavimo arba algebrinėmis) tiksliai nustatyti, kokios išorinės paviršinės jėgos $\{p\}$ ir išorinės tūrinės jėgos $\{g\}$ sąlygoja įtempimų būvį, apibūdinamą įtempimais $\{\sigma\}$. Tačiau šių diferencialinių lygčių neužtenka pagrindiniam TT uždaviniui išspręsti: esant duotoms išorinėms jėgoms, nustatyti įtempimų būvį, t.y. įtempimų tenzorių $\tilde{\sigma}$, nes yra 3 lygtys, o nežinomųjų 6.

Algebrinės lygtys – tik kraštinės sąlygos. Uždavinys statiškais neišsprendžiamas. Įtempimų vektorius $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz},\}^T$ vadinamas statiškai galimu, jeigu tenkina šias priklausomybes.

5. Deformuoto būvio teorija

Be įtempimų TT nagrinėja kūno deformacijas ir kūno taškų poslinkius.

Poslinkio komponentai žymimi *u*, *v*, *w* (10 pav.).



10 pav.

$a(x, y, z)$, $a'(x + u,\ \ y + v,\ \ z + w)$

$u = u(x, y, z)$

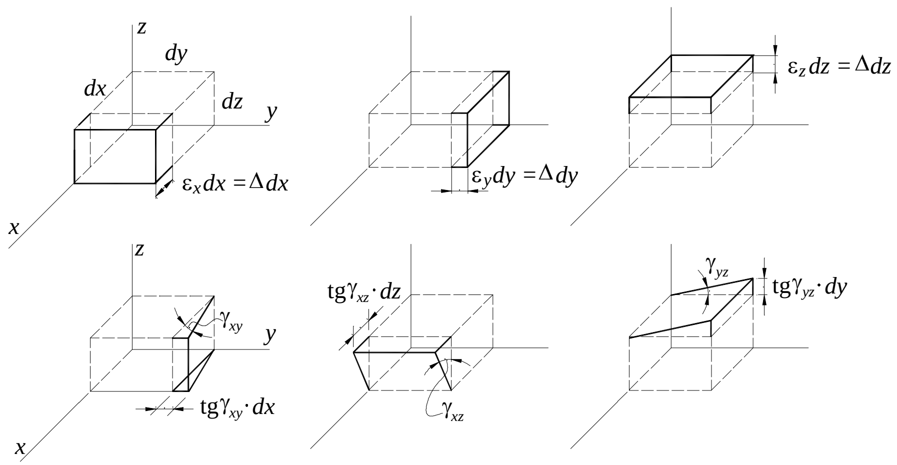
$v = v(x, y, z)$

$w = w(x, y, z)$

taško poslinkiai yra taško koordinačių funkcijos.

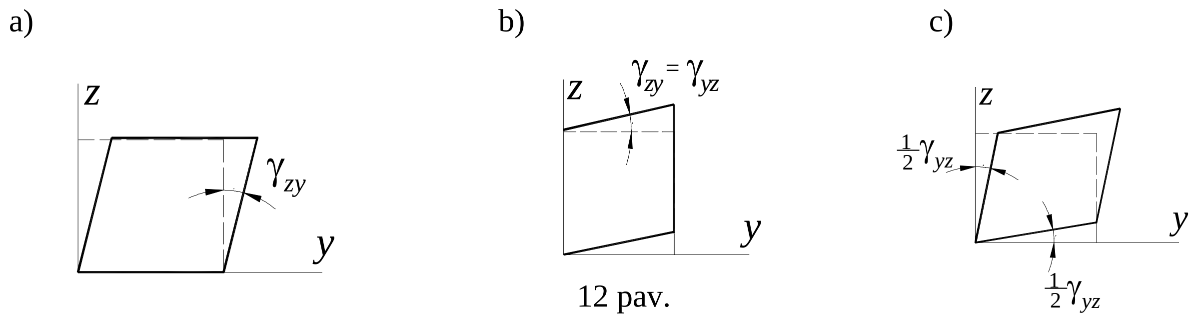
Remiantis medžiagos vientisumo prielaida teigiame, kad *u*, *v* ir *w* funkcijos gali būti apskaičiuotos visuose taškuose.

Laikydami, kad deformacijos mažos, be galo mažojo gretasienio deformaciją galima išreikšti šešiomis deformacijomis (3 linijinės ir 3 kampinės) $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ (11 pav.).



11 pav.

Gretasienio deformaciją galima vaizduoti įvairiai, bet kampinė deformacija bus ta pati (12 pav.).



12 pav.

Šiuos deformacijų būvius (12 a, b, c pav.) atitinka tas pats įtempimų būvis.

Analogiškai įtempimų būviui, deformacijų būvis aprašomas deformacijų vektoriumi ir tenzoriumi:

deformacijų vektorius $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T$

deformacijų tenzorius $$\tilde{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix},$$

Deformacijų būvis – deformacijų visuma 3 kryptimis ir 3-ose plokštumose.

Linijinės deformacijos trimis tarpusavyje statmenų ašių, status kampas tarp kurių nesikeičia, kryptimis yra svarbiausiosios deformacijos ε_1, ε_2, ε_3, kurios skaičiuojamos iš lygties

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0\,. \qquad (17)$$

Kubinės lygties (17) koeficientai apskaičiuojami

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_x + \varepsilon_z\,,$$

$$I_2 = \det\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

$$I_3 = \det\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Analogija $\quad \dfrac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \quad \dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_x} \quad \dfrac{\sigma_z}{\varepsilon_z} \quad \dfrac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}\gamma_{xy}} \quad \dfrac{\tau_{xz}}{\frac{1}{2}\gamma_{xz}} \quad \dfrac{\tau_{yz}}{\frac{1}{2}\gamma_{yz}}$

Matome, kad geometriškai deformacija gali būti aprašoma taškų poslinkiais arba gretasienių, į kuriuos gali būti sudalintas kūnas, deformacijų vektoriumi ir tenzoriumi.

6. Geometrinės lygtys

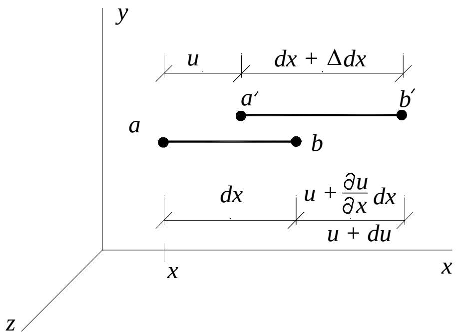
Lygtys siejančios poslinkius su deformacijomis vadinamos geometrinėmis lygtimis. Poslinkius laikysime žinomais.

Toliau nagrinėjame mažas atkarpas, pvz. ilgio *dx* (13 pav.). Teigiame, kad atkarpos ilgio pokyčiui įtakos turi tik poslinkis *u*, o poslinkiai *v* ir *w* nekeičia ilgio, dėl jų atkarpa tik pasisuka. Atstumą tarp taškų *a* ir *b'* galima išreikšti dvejopai

$ab' = u + dx + \Delta dx$ (13 pav. viršutinė matmenų linija)

arba

$ab' = dx + u + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx$ (13 pav. apatinė matmenų linija)



13 pav.

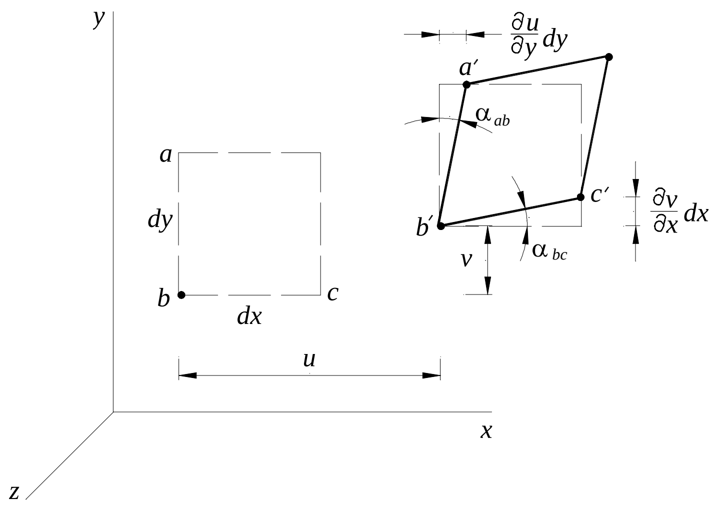
$$u + dx + \Delta dx = dx + u + \frac{\partial u}{\partial x}dx, \ arba \quad \Delta dx = \frac{du}{dx}dx$$

$\varepsilon_x = \dfrac{\Delta dx}{dx}$ (žr.11 pav.), tada $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta dx}{dx} = \dfrac{du}{dx}\dfrac{dx}{dx} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

$\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, analogiškai $\varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$; $\varepsilon_z = \dfrac{\partial u}{\partial z}$

Tai pirmosios trys geometrinės lygtys:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}$$



.

14 pav

Toliau nagrinėjame gretasienio (14 pav.) projekciją į plokštumą x - y.

Neįvertiname poslinkio w ir matmenų pokyčio, įvertiname tik taškų a ir c poslinkius ir pradinio stataus kampo pokytį. Kampinė deformacija

$\gamma_{xy} = \alpha_{ab} + \alpha_{bc}$, kampai

$$\alpha_{ab} \cong tg\alpha_{ab} = \frac{\partial u}{\partial y} dy / dy = \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\alpha_{bc} \cong tg\alpha_{bc} = \frac{\partial v}{\partial x} dx / dx = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \text{tada}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Kitas lygtis gauname analogiškai nagrinėdami poslinkius ir stataus kampo pokyčius plokštumose y – z ir x – z. Jas galima užrašyti keičiant ašių ir poslinkių žymėjimus

$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x; \qquad u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow u.$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Tokiu būdu gaunamos šešios geometrinės deformacijų ir poslinkių darnos lygtys :

$$\left.\begin{array}{lll} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{array}\right\} \qquad (18)$$

Kūno geometrinės lygtys (18) dar vadinamos Koši (prancūzų matematikas Augustin Cauchy, 1789-1887) vardu. Operatorine-matricine forma Koši lygtys užrašomos

$$\nabla^T \cdot \{u\} = \{\varepsilon\}, \qquad (19)$$

kur

$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$ – deformacijų vektorius, $\{u\} = \{u, v, w\}^T$ – poslinkių vektorius,

$$\nabla^T = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix}$$ – diferencialinis operatorius.

Jeigu žinomi 3 poslinkiai tai pagal Koši formules lengvai nustatomi 6 deformacijų komponentai.

7. Tampraus kūno fizinės priklausomybės

Pusiausvyros (NAVJE) ir geometrinės (KOŠI) lygtys galioja ir tampriam ir plastiškam bei valkšniam kūnui, jei tik galioja mažų deformacijų prielaida. Kūnų skirstymas į tamprius ir netamprius prasideda tik tada, kai nusakome ryšį tarp deformacijų ir įtempimų.

Tai fizinis dėsnis, arba apibendrintas Huko (anglų fizikas Robert Hooke, 1630–1703) dėsnis:

$$\left.\begin{array}{c} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \dfrac{\tau_{zx}}{G} \end{array}\right\}, \tag{20}$$

Operatorine-matricine forma Huko dėsnis užrašomos $\{\varepsilon\} = [D]\{\sigma\},$ (21)

arba

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = [D] \times \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \text{kur } D = \frac{1}{E} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -\nu & -\nu & & & \\ \hline -\nu & 1 & -\nu & & & \\ \hline -\nu & -\nu & 1 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & 2(1+\nu) \\ \hline \end{array}$$

D – pasiduodamumo matrica.

Kai kada Huko dėsnis užrašomas $$\{\sigma\} = \left[D^{-1}\right]\{\varepsilon\} = [K]\{\varepsilon\}, \qquad (22)$$

$$K = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\frac{\lambda(1-\nu)}{\nu} & \lambda & \lambda & & & \\
\hline
\lambda & \frac{\lambda(1-\nu)}{\nu} & \lambda & & & \\
\hline
\lambda & \lambda & \frac{\lambda(1-\nu)}{\nu} & & & \\
\hline
 & & & G & & \\
\hline
 & & & & G & \\
\hline
 & & & & & G
\end{array}$$

kur [K] – standumo matrica,

λ – Lame (matematikas, inžinierius Gabriel Lame, 1795-1870) koeficientas $\lambda = \dfrac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$,

E – tamprumo modulis, G – šlyties modulis,

ν – Puasono (prancūzų mechanikas, fizikas ir matematikas Simeon Denis Poisson, 1781-1840) koeficientas

8. Tamprumo teorijos lygčių sistema

Duotas kūnas. Žinome įtvirtinimo sąlygas ir apkrovas. Reikia rasti 15 nežinomųjų funkcijų.

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T, \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T, \ \{u\} = \{u, v, w\}^T.$$

Šiems nežinomiesiems rasti turime 15 lygčių.

Lygtys	Nežinomųjų skaičius $\{\sigma\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{u\}$	Lygčių skaičius
Statikos (***Navje)*** $\nabla\{\sigma\} - \{g\} = \{0\}$	6	–	–	3
Geometrinės (***Koši***) $\nabla^T\{u\} = \{\varepsilon\}$		6	3	6
Fizinės (***Huko***) $\{\varepsilon\} = [D]\cdot\{\sigma\}$ arba $\{\sigma\} = [K]\cdot\{\varepsilon\}$	6	6		6
	Nežinomųjų 6 + 6 + 3 = 15			Lygčių 3+6+6=15

TT uždavinys yra išsprendžiamas iš principo. Prie šių lygčių būtina prijungti kraštines sąlygas:

statines $\begin{cases} [N]\{\sigma\} = \{p\} \text{ant } A_f, \\ [N]\{\sigma\} = \{R\} \text{ant } A_u \end{cases};$

ir

kinematines $\{u\} = \{0\}$ ant A_u.