1.9. Standžiosios PDL sistemos

Skaitiškai spręsdami diferencialinį uždavinį visada turime parinkti diskretųjį parametrą τ. Čia tenka rasti kompromisą tarp kelių reikalavimų.

Pirma, uždavinio sprendimo laikas yra proporcingas dydžiui $\frac{T}{\tau}$, todėl norėdami sumažinti skaičiavimo kaštus, siekiame integruoti su didžiausiu žingsniu τ.

Antra, baigtinių skirtumų metodo aproksimavimo paklaida n-ajame žingsnyje yra proporcinga dydžiui $C\tau_n^p$. Todėl norėdami ε tikslumu apskaičiuoti diskretųjį sprendinį, turime imti pakankamai mažą žingsnį $\tau_n \leqslant \tau_A$.

Trečia, jei diskretusis metodas yra tik sąlygiškai stabilusis, tai parenkant τ būtina išpildyti ir stabilumo reikalavimą $\tau \leqslant \tau_S$. Norėdami apskaičiuoti pakankamai tikslų diferencialinio uždavinio sprendinio artinį, turime išpildyti ir aproksimacijos tikslumo, ir diskrečiojo metodo stabilumo sąlygas. Todėl žingsnį τ_n parenkame tokį, kad galiotų nelygybė

$$\tau_n \leqslant \min(\tau_S, \tau_A).$$

Sprendžiant įvairius uždavinius, žingsnis τ_n kartais labiau ribojamas aproksimacijos tikslumo, kitais atvejais – stabilumo reikalavimo.

Pateiksime paprasčiausią *standžiųjų PDL* apibrėžimą. Sakysime, kad PDL pradinis uždavinys yra *standusis*, jei τ_S yra daug mažesnis už τ_A, tai yra stabilumo reikalavimas yra daug griežtesnis už aproksimacijos tikslumo reikalavimą. Vėliau pateiksime ir tikslesnį šio apibrėžimo variantą.

Nagrinėkime modelinį uždavinį:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -\lambda u, \quad \lambda > 0\,, \\ u(0) = 1\,. \end{cases} \tag{1.65}$$

Šį uždavinį spręskime neišreikštiniu Eulerio metodu:

$$\frac{y^n - y^{n-1}}{\tau} = -\lambda y^n\,.$$

Iš lygties gauname lygybę

$$y^n = \frac{1}{1+\lambda\tau} y^{n-1}\,,$$

todėl neišreikštinio Eulerio metodo charakteristinės lygties sprendinys visada tenkina nelygybę

$$q = \frac{1}{1+\lambda\tau} < 1\,,$$

tai yra neišreikštinis Eulerio metodas yra nesąlygiškai stabilusis.

Dabar (1.65) uždavinį spręskime išreikštiniu Eulerio metodu:

$$\frac{y^n - y^{n-1}}{\tau} = -\lambda y^{n-1}\,.$$

Jo sprendinys yra

$$y^n = (1-\lambda\tau)y^{n-1}\,,$$

todėl šis metodas yra stabilusis, tai yra $|q| \leqslant 1$, tik kai išpildyta sąlyga

$$\tau \leqslant \frac{2}{\lambda}\,.$$

Jeigu $\lambda \gg 1$, tai reikia imti labai mažą diskretųjį žingsnį τ.

Pažymėsime, kad jei yra viena lygtis, tai stabilumo problema nėra labai sudėtinga, nes ir diferencialinio uždavinio sprendinys $u = e^{-\lambda t}$ mažėja labai greitai. Todėl laiko intervalas, kuriame sprendinio modulis didesnis už pasirinktą dydį ε, nėra ilgas. Uždavinį spręsime tol, kol $|u(t)| \geqslant \varepsilon$. Iš tiksliojo sprendinio išraiškos gausime, kad uždavinį užtenka spręsti intervale $[0, T]$, čia T apskaičiuojamas iš lygties:

$$e^{-\lambda t} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\lambda}\,.$$

Pavyzdžiui, jei $\varepsilon = 10^{-4}$, tai $T = \dfrac{10}{\lambda}$. Todėl net ir spręsdami (1.65) uždavinį sąlygiškai stabiliąja schema, pavyzdžiui, išreikštiniu Eulerio metodu, kai parametras τ turi tenkinti apribojimą $\tau \leqslant \dfrac{2}{\lambda}$, gauname, kad žingsnių skaičius yra lygus $N = \dfrac{T}{\tau} = 5$ ir jis nepriklauso nuo parametro λ.

Intervale $[0, \dfrac{10}{\lambda}]$ žingsnis τ labiau ribojamas dėl aproksimacijos tikslumo, o išreikštinio ir neišreikštinio Eulerio metodų aproksimavimo paklaidos yra tos pačios eilės.

Tiesinių PDL lygčių sistemų stabilumas

Stabilumo sąlyga yra kur kas reikšmingesnė, kai sprendžiame ne vieną diferencialinę lygtį, o tokių lygčių sistemą. Pirmiausia išnagrinėsime modelinę diferencialinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = -\lambda_1 u_1\,, & u_1(0) = 1\,, \\ \dfrac{du_2}{dt} = -\lambda_2 u_2\,, & u_2(0) = 1\,. \end{cases} \tag{1.66}$$

Užrašykime ją vektoriniu pavidalu

$$\frac{dU}{dt} = AU\,,$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Jeigu $\lambda_j > 0$, tai abi sprendinio komponentės yra monotoniškai mažėjančios funkcijos

$$u_1(t) = e^{-\lambda_1 t}, \quad u_2(t) = e^{-\lambda_2 t}\,.$$

Tarkime, kad vienas iš parametrų λ_j yra daug didesnis už kitą, pavyzdžiui, $\lambda_2 \gg \lambda_1$. Šiuo atveju komponentė $u_2(t)$ mažėja daug greičiau nei $u_1(t)$, todėl laiko intervalas $[0, T]$, kuriame nagrinėjame (1.66) uždavinį, priklauso nuo λ_1:

$$T = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\lambda_1} = \frac{10}{\lambda_1}\,.$$

Diferencialinių lygčių sistemą spręskime išreikštiniu Eulerio metodu:

$$\begin{cases} \dfrac{y_1^{n+1} - y_1^n}{\tau} = -\lambda_1 y_1^n\,, \\ \dfrac{y_2^{n+1} - y_2^n}{\tau} = -\lambda_2 y_2^n\,. \end{cases}$$

Tirdami šio metodo stabilumą gavome tokį diskrečiojo parametro τ apribojimą:

$$\tau \leqslant \tau_S, \quad \tau_S = \min\left(\frac{2}{\lambda_1}, \frac{2}{\lambda_2}\right) = \frac{2}{\lambda_2}\,.$$

Taigi išreikštiniu Eulerio metodu spręsdami modelinę diferencialinių lygčių sistemą intervale $[0, T]$ atliksime N integravimo žingsnių:

$$N \geqslant \frac{T}{\tau_S} = \frac{5\lambda_2}{\lambda_1} \gg 1\,.$$

Kiekvieną (1.66) modelinio uždavinio lygtį galėjome spręsti ir atskirai. Tada reikėtų imti skirtingus žingsnius τ_j ir lygtis spręsti skirtinguose laiko intervaluose $[0, T_j]$. Tačiau gauti rezultatai tinka ir bendroms diferencialinių lygčių sistemoms:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = AU\,, \\ U(0) = U_0\,. \end{cases} \tag{1.67}$$

Egzistuoja tokia ortogonalioji matrica Q, kad matrica

$$\tilde{A} \;=\; Q^{-1}\, A\, Q$$

yra įstrižaininė, o jos įstrižainės elementai sutampa su A matricos tikrinėmis reikšmėmis. Nagrinėkime naują vektorių V, kuris susijęs su vektoriumi U sąryšiu

$$U = QV\,.$$

Įrašę šią išraišką į (1.67) lygtį, gausime naują diferencialinių lygčių sistemą, kurią tenkina $V(t)$ vektorius:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = \tilde{A}\, V\,, \\ V(0) = Q^{-1} U(0)\,. \end{cases}$$

Gauta lygčių sistema yra analogiška jau išnagrinėtai modelinei diferencialinių lygčių sistemai.

(1.67) diferencialinių lygčių sistema yra vadinama *standžiąja*, jei išpildytos šios sąlygos:

$$\text{a)} \quad \operatorname{Re} \lambda_k < 0, \quad k = 1, 2, \ldots, M\,,$$

$$\text{b)} \quad S = \frac{\max |\operatorname{Re} \lambda_k|}{\min |\Re e\ \lambda_k|} \gg 1\,,$$

čia λ_k yra matricos A tikrinės reikšmės. Skaičius S vadinamas A matricos *standumo skaičiumi.*

Standžiosios diferencialinių lygčių sistemos sprendinys priklauso ir nuo greitai, ir nuo lėtai mažėjančių komponenčių. Pirmosios nulemia sąlygiškai stabiliųjų metodų pasirenkamo žingsnio τ dydį, o antrosios – laiko intervalo $[0, T]$ trukmę.

Vėl nagrinėkime (1.66) modelinį uždavinį. Intervale $[0, \frac{10}{\lambda_2}]$ sprendinys $u_2(t)$ keičiasi labai greitai, todėl ne tik dėl stabilumo, bet ir siekdami norimo aproksimacijos tikslumo, turime skaičiuoti žingsniu $\tau \leqslant \dfrac{2}{\lambda_2}$. Tačiau laiko momentu $t_1 = \dfrac{10}{\lambda_2}$ komponentė $u_2(t)$ jau yra labai maža, nes $u_2(t_1) = e^{-10} < 0,0001$, todėl norėdami pakankamai tiksliai aproksimuoti funkciją $u_1(t)$ galėtume padidinti žingsnį τ iki $\mathcal{O}\big(\dfrac{1}{\lambda_1}\big)$. Tačiau išreikštinis Eulerio metodas yra tik sąlygiškai stabilusis, todėl ir toliau turime skaičiuoti mažu žingsniu $\tau = \dfrac{2}{\lambda_2}$.

Išeitis iš šios situacijos – taikyti neišreikštinius nesąlygiškai stabiliuosius metodus, tada diskretusis žingsnis τ parenkamas tik atsižvelgiant į aproksimacijos tikslumo reikalavimą. Kaip pavyzdį galime nurodyti neišreikštinį Eulerio metodą. Tiesinių PDL sistemoms šis metodas užrašomas tokiu būdu:

$$\frac{Y^n - Y^{n-1}}{\tau_n} = AY^n \,,$$

o netiesinių PDL sistemoms:

$$\frac{Y^n - Y^{n-1}}{\tau_n} = F(t_n, Y^n) \,.$$