

1.8. Kiti skaitinių schemų stabilumo apibrėžimai

Ankstesniuose poskyriuose jau pateikėme paprasčiausius stabilumo apibrėžimus ir stabilumo tyrimo metodus, kai PDL pradinis uždavinys sprendžiamas baigtiniame intervale $[0, T]$. Šiame poskyryje patikslinsime stabilumo apibrėžimą, kad jį galėtume naudoti ir tais atvejais, kai T yra bet koks skaičius.

1.8.1. Skaitinio sprendinio aprėžtumas ir stabilumas

Sakysime, kad *baigtinių skirtumų metodas* yra *stabilus*, jei šiuo metodu aproksimavę PDL pradinį uždavinį, turintį aprėžtą sprendinį, gauname taip pat aprėžtą diskretųjį sprendinį. Jei diskretusis sprendinys yra aprėžtas tik tam tikroms parametro τ reikšmėms, tai baigtinių skirtumų metodas yra *sąlygiškai stabilus*.

Analizę pradėsime nuo paprasčiausio modelinio uždavinio – vienos diferencialinės lygties su pastoviuoju koeficientu:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\lambda u, & \lambda \geq 0, \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (1.59)$$

Šio uždavinio sprendinys yra $u(t) = e^{-\lambda t}$. Nurodysime svarbią jo savybę, kurią naudosime apibrėždami skaitinio sprendinio stabilumą: funkcija yra aprėžtoji $|u(t)| \leq 1$.

Spręskime modelinį uždavinį daugiažingsniu metodu, tada gausime lygtį

$$\sum_{k=0}^m (a_k + \tau \lambda b_k) y^{n-k} = 0. \quad (1.60)$$

Remiantis stabilumo apibrėžimu, daugiažingsnis skirtumų metodas yra stabilus, jei (1.60) skirtumų lygties sprendinys yra aprėžtas $|y^n| \leq C$.

Skirtingai nuo paprasčiausio šaknų kriterijaus, dabar schemos stabilumas priklauso ne tik nuo koeficientų a_k , bet ir nuo koeficientų b_k .

(1.60) lygtis yra tiesinė skirtumų lygtis su pastoviais koeficientais, todėl jos bendrąjį sprendinį išreiškiame atskirųjų sprendinių $y(t_n) = q^n$ tiesine kombinacija. Ieškodami atskirųjų sprendinių sprendžiame charakteristinę lygtį

$$\sum_{k=0}^m (a_k + \tau \lambda b_k) q^{m-k} = 0. \quad (1.61)$$

Baigtinių skirtumų schema yra *stabili*, kai jos charakteristinės lygties visų šaknų moduliai yra ne didesni už vienetą, o tarp šaknų, kurių modulis lygus vienetui, nėra kartotinių.

Ištirkime dviejų baigtinių skirtumų metodų stabilumą. Pirmoji schema yra simetrinis Eulerio metodas

$$\frac{y^n - y^{n-1}}{\tau} = \frac{f_n + f_{n-1}}{2},$$

antroji schema – dvižingsnis išreikštinis metodas

$$\frac{y^n - y^{n-2}}{2\tau} = f_{n-1}. \quad (1.62)$$

Pažymėtina, kad abiejų schemų aproksimacijos tikslumo eilė yra antroji, jos abi tenkina pirmąjį šaknų kriterijų.

Simetrinio Eulerio metodo charakteristinė lygtis yra

$$\left(1 + \frac{\tau}{2}\lambda\right)q - \left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda\right) = 0.$$

Todėl vienintelė šios lygties šaknis

$$q = \frac{1 - 0,5\lambda\tau}{1 + 0,5\lambda\tau},$$

nesąlygiškai tenkina stabilumo reikalavimą

$$|q| \leq 1, \quad \text{kai } \lambda > 0.$$

Dvižingsnio išreikštinio metodo charakteristinė lygtis yra

$$q^2 + 2\tau\lambda q - 1 = 0.$$

Apskaičiuojame abu šios lygties sprendinius

$$q_1 = -\tau\lambda + \sqrt{1 + (\tau\lambda)^2}, \quad q_2 = -\tau\lambda - \sqrt{1 + (\tau\lambda)^2}.$$

Atlikę nesudėtingus skaičiavimus, įrodome, kad $|q_1| < 1$, kai $\lambda > 0$. Tačiau bet kurioms parametro τ reikšmėms galioja nelygė $|q_2| > 1$, jei tik $\lambda > 0$. Todėl dvižingsnis išreikštinis metodas yra *nesąlygiškai nestabilusis* naujojo stabilumo apibrėžimo atžvilgiu, nes gautasis diskretusis sprendinys yra neaprežta iš viršaus funkcija.

Kita vertus dvižingsnis išreikštinis metodas tenkina pirmąjį šaknų kriterijų. Tada iš 1.6 teoremos gauname, kad diskretusis sprendinys konverguoja, kai laikas t yra fiksuotas, o parametras τ artėja į nulį.

Stabilumo srities nustatymas. Naudojantis stabilumo apibrėžimu reikia rasti visas (1.61) charakteristinės lygties šaknis, o paskui ištirti, kada jos tenkina stabilumo sąlygą. Šią analizę galima suprastinti. Aibę tokių λ reikšmių, kada diskretusis metodas yra stabilus, vadinsime *stabilumo sritimi*. Stabilumo srities kontūrinius taškus randame iš charakteristinės lygties, joje įrašę reikšmes $q = 1$ ir $q = -1$.

1.9 pavyzdys. Keturžingsnio Adamso ir Bashfortho metodo stabilumo analizė. Nagrinėkime keturžingsnį Adamso ir Bashfortho metodą, sukonstruotą 1.5 pavyzdyje:

$$\frac{Y^n - Y^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{24}(55F_{n-1} - 59F_{n-2} + 37F_{n-3} - 9F_{n-4}).$$

Šio metodo charakteristinė lygtis yra tokia

$$q^4 - (1 - \frac{55}{24}\mu)q^3 - \frac{59}{24}\mu q^2 + \frac{37}{24}\mu q - \frac{9}{24}\mu = 0,$$

čia pažymėjome $\mu = \tau\lambda$. Iš lygties išreiškiame μ :

$$\mu = \frac{24(q^3 - q^4)}{55q^3 - 59q^2 + 37q - 9}.$$

Tada stabilumo srities kontūro taškai yra

$$\mu(1) = 0, \quad \mu(-1) = 0, 3.$$

Kadangi $\mu'(-1) < 0$, tai keturžingsnio Adamso ir Bashfortho metodo stabilumo sritis yra atvirasis intervalas $(0, 0, 3)$, taigi metodas yra stabilus, jei $\tau\lambda < 0, 3$.

Nagrinėdami šį pavyzdį gavome, kad baigtinių skirtumų schema yra sąlygiškai stabilioji ir skaičiuojant reikia naudoti pakankamai mažą parametą $\tau \leq \tau_0$. Tačiau šį kartą τ_0 jau nepriklauso nuo laiko momento T .

1.9 lentelėje pateikta apibendrinta informacija apie Adamso ir Bashfortho metodą, kurį užrašysime tokia forma:

$$\frac{Y^n - Y^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{\gamma}(b_1F_{n-1} + b_2F_{n-2} + \dots + b_mF_{n-m}).$$

Šis metodas yra stabilus, kai $\tau\lambda < \nu$, o p pažymėjome metodo aproksimacijos tikslumo eilę.

1.9 lentelė. Adamso ir Bashfortho metodas

| m | γ | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | p | ν |
|-----|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-------|
| 1 | 1 | 1 | | | | | 1 | 2,000 |
| 2 | 2 | 3 | -1 | | | | 2 | 1,000 |
| 3 | 12 | 23 | -16 | 5 | | | 3 | 0,545 |
| 4 | 24 | 55 | -59 | 37 | -9 | | 4 | 0,300 |
| 5 | 720 | 1901 | -2774 | 2616 | -1274 | 251 | 5 | 0.163 |

1.10 lentelėje tokia pati informacija pateikta apie Adamso ir Moultono metodą:

$$\frac{Y^n - Y^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{\gamma} (b_0 F_n + b_1 F_{n-1} + \dots + b_m F_{n-m}).$$

1.10 lentelė. Adamso ir Moultono metodas

| m | γ | b_0 | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | p | ν |
|-----|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|----------|
| 1 | 2 | 1 | 1 | | | | 2 | ∞ |
| 2 | 12 | 5 | 8 | -1 | | | 3 | 6,000 |
| 3 | 24 | 9 | 19 | -5 | 1 | | 4 | 3,000 |
| 4 | 720 | 251 | 646 | -264 | 106 | -19 | 5 | 1,837 |

Matome, kad neišreikštinio Adamso metodo stabilumo intervalas yra maždaug dešimt kartų didesnis už atitinkamo tikslumo išreikštinio Adamso metodo stabilumo intervalą.

Panašiai tiriamas ir Rungės ir Kuto metodo stabilumas (pavyzdžiai pateikti vadovėlyje).

1.8.2. Stabilumo apibrėžimas DL sistemoms

Šiame poskyryje nagrinėsime sudėtingesnį modelinį uždavinį – PDL sistemos pradinį uždavinį

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

čia A yra $M \times M$ dydžio matrica. Tegul λ_j yra matricos A tikrinė reikšmė, o W_j yra šią reikšmę atitinkantis tikrinis vektorius:

$$AW_j = \lambda_j W_j.$$

Iš algebros kurso žinome, kad bendruoju atveju matricų tikrinės reikšmės yra kompleksiniai skaičiai.

Todėl nagrinėkime modelinį uždavinį:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda u, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1.63)$$

čia λ yra kompleksinis skaičius. Šio uždavinio sprendinys $u = u_0 e^{\lambda t}$ yra aprėžtoji funkcija, jei λ realioji dalis yra neneigiamasis skaičius:

$$\operatorname{Re} \lambda \leq 0.$$

Todėl diferencialinio uždavinio stabilumo sritį sudaro kompleksinės plokštumos kairioji pusplokštumė

$$\mathbb{C}^- = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq 0\}.$$

(1.63) modelinį uždavinį spręsimė daugiažingsniu skirtumų metodu:

$$\sum_{k=0}^m (a_k - \mu b_k) y^{n-k} = 0, \quad \mu = \tau \lambda.$$

Šio skaitinio metodo charakteristinė lygtis yra

$$\sum_{k=0}^m (a_k - \mu b_k) q^{n-k} = 0.$$

1.8.3. A stabilumas

Daugiažingsnio skirtumų metodo *stabilumo sritimi* vadiname aibę kompleksinės plokštumos taškų μ , kuriuose šis metodas yra stabilus, tai yra visų charakteristinės lygties šaknų moduliai yra ne didesni už vienetą.

Baigtinių skirtumų metodas vadinamas *A stabiliuoju*, jeigu jo stabilumo sričiai

$$A = \{\mu \in \mathbb{C} : |q(\mu)| \leq 1\}$$

priklauso (1.63) modelinio diferencialinio uždavinio stabilumo sritis \mathbb{C}^- , tai yra visa pusplokštumė $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Taigi *A* stabilusis metodas yra nesąlygiškai stabilus.

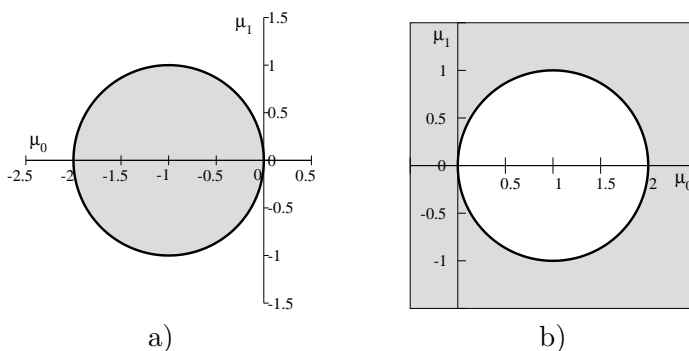
Eulerio metodo stabilumo sritis. Ištirsime Eulerio metodo stabilumą. Pirmiausia (1.63) modelinį uždavinį spėsime išreikštiniu Eulerio metodu

$$y^{n+1} = (1 + \mu)y^n, \quad \mu = \tau\lambda.$$

Stabilumo sąlyga $|1 + \mu| \leq 1$ kompleksinėje plokštumoje apibrėžia stabilumo sritį

$$(\mu_0 + 1)^2 + \mu_1^2 \leq 1,$$

čia μ_0 ir μ_1 yra atitinkamai realioji ir menamoji kompleksinio skaičiaus μ dalys. Išreikštinio Eulerio metodo stabilumo sritis pavaizduota 1.2 pav. a dalyje. Matome, kad išreikštinis Eulerio metodas yra tik sąlygiškai stabilus.



1.2 pav. Stabilumo sritys (pilka spalva): a) išreikštinio Eulerio metodo, b) neišreikštinio Eulerio metodo

Dabar (1.63) modelinį uždavinį spręsimė neišreikštiniu Eulerio metodu

$$y^{n+1} = \frac{1}{1-\mu} y^n.$$

Šio metodo stabilumo sritis apibrėžiama nelygybe

$$\left| \frac{1}{1-\mu} \right| \leq 1,$$

kurią pertvarkę, gauname stabilumo sritį

$$(1-\mu_0)^2 + \mu_1^2 \geq 1.$$

Ji pavaizduota pilka spalva 1.2 pav. *b* dalyje. Matome, kad neišreikštinio Eulerio metodo stabilumo sritis yra platesnė už diferencialinio uždavinio stabilumo sritį, todėl neišreikštinis Eulerio metodas yra *A stabilusis*, o kartu ir *nesąlygiškai stabilusis*.

Rasime simetrinio Eulerio metodo stabilumo sritį. Šiuo metodu spręskime modelinį uždavinį

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = \lambda \frac{y^{n+1} + y^n}{2} \Rightarrow y^{n+1} = \frac{1 + 0,5\mu}{1 - 0,5\mu} y^n.$$

Simetrinio Eulerio metodo stabilumo sritis apibrėžiama nelygybe

$$\left| \frac{1 + 0,5\mu}{1 - 0,5\mu} \right| \leq 1,$$

kurią išsprendę randame stabilumo sritį $\mu_0 \leq 0$. Taigi simetrinio Eulerio metodo stabilumo sritis sutampa su diferencialinio uždavinio stabilumo sritimi \mathbb{C}^- , todėl ir šis metodas *A stabilusis*.

Gavome, kad išreikštinis Eulerio metodas nėra *A stabilusis*, o neišreikštinis ir simetrinis Eulerio metodai yra *A stabilieji*.

Suformuluosime du svarbius teiginius apie *A stabiluosius metodus*.

1.7 teorema. *Tarp daugiažingsnių skirtumų metodų nėra A stabiliojo išreikštinio metodo.*

Pasirodo, kad ir neišreikštinių *A stabilųjų metodų klasė nėra plati*.

1.8 teorema. *Tarp tiesinių daugiažingsnių skirtumų metodų nėra A stabilųjų metodų, kurių tikslumo eilė būtų didesnė negu antroji.*

Simetrinis Eulerio metodas yra *A stabiliojo antrosios tikslumo eilės metodo pavyzdys*.

1.8.4. $A(\alpha)$ stabilieji daugiažingsniai metodai

Nagrinėjant didesnio tikslumo metodus, tenka susilpninti stabilumo reikalavimus. Daugelio taikomųjų uždavinių matricų A visos tikrinės reikšmės yra realiosios, pavyzdžiui, šia savybe pasižymi simetrinės matricos. Todėl apibrėšime dar vieną stabilumo sąvoką.

Daugiažingsnis skirtumų metodas vadinamas $A(\alpha)$ *stabiliuoju*, jeigu jo stabilumo sričiai priklauso aibė

$$|\arg(-\mu)| < \alpha, \quad \mu = \tau\lambda.$$

Jeigu matricos A visos tikrinės reikšmės yra realiosios ir neneigiamosios $\lambda_j \leq 0$, tai $A(\alpha)$ stabilusis metodas yra nesąlygiškai stabilusis. Pažymėtina, kad $A(\frac{\pi}{2})$ stabilumo apibrėžimas sutampa su A stabilumo apibrėžimu.

Giro metodas. Yra sukonstruoti didelės tikslumo eilės $A(\alpha)$ stabilieji daugiažingsniai skirtumų metodai. Vienas iš dažniausiai taikomų yra *visiškai neišreikštinis metodas*

$$\frac{a_0 Y^n + a_1 Y^{n-1} + \dots + a_m Y^{n-m}}{\tau} = F(t_n, Y^n),$$

kuris dar vadinamas *Giro (Gear) metodu*.

Kadangi visiškai neišreikštinis metodas yra atskiras daugiažingsnių skirtumų metodų atvejis su $b_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, tai ir p -osios eilės aproksimacijos sąlygas randame iš (1.47) lygčių sistemos, gautos daugiažingsnio skirtumų metodo koeficientams skaičiuoti:

$$\begin{cases} a_0 = -(a_1 + \dots + a_m), \\ \sum_{k=1}^m k a_k = -1, \\ \sum_{k=1}^m k^l a_k = 0, \quad l = 2, 3, \dots, p. \end{cases} \quad (1.64)$$

Todėl didžiausia m -žingsnio Giro metodo aproksimacijos tikslumo eilė yra lygi m .

1.10 pavyzdys. Dvižingsnis Giro metodas. Sudarykime (1.64) tiesinių lygčių sistemą, kai $m = 2$:

$$\begin{cases} a_0 = -a_1 - a_2, \\ a_1 + 2a_2 = -1, \\ a_1 + 4a_2 = 0. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą, gauname dvižingsnio Giro metodo formulę

$$\frac{3Y^n - 4Y^{n-1} + Y^{n-2}}{2\tau} = F(t_n, Y^n).$$

1.11 lentelėje pateikti Giro metodo, užrašyto tokia forma

$$\frac{a_0 Y^n + a_1 Y^{n-1} + \dots + a_m Y^{n-1}}{\tau} = \gamma F(t_n, Y^n),$$

koeficientai.

1.11 lentelė. Giro metodas

| m | γ | a_0 | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | a_5 |
|-----|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 2 | 3 | -4 | 1 | | | |
| 3 | 6 | 11 | -18 | 9 | -2 | | |
| 4 | 12 | 25 | -48 | 36 | -16 | 3 | |
| 5 | 60 | 137 | -300 | 300 | -200 | 75 | -12 |