1.7. Daugiažingsnių skirtumų metodų stabilumas

Nors mes ir sudarėme aukščiausiosios tikslumo eilės daugiažingsnius skirtumų metodus, tačiau ne visi iš jų yra tinkami taikyti. Kodėl taip yra, paaiškės, kai išnagrinėsime kitą svarbią schemų savybę – stabilumą.

Norėdami išsiaiškinti stabilumo sąvoką nagrinėkime tokį modelinį uždavinį:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 0\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases} \tag{1.60}$$

Šio uždavinio sprendinys yra konstanta

$$u(t) \equiv u(0)\,.$$

Dabar modelinį uždavinį spręsime (1.47) daugiažingsniu baigtinių skirtumų metodu:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k y^{n-k} = 0\,. \tag{1.61}$$

Gautoji lygtis yra skirtuminis (1.60) diferencialinės lygties artinys. Todėl stabilumo apibrėžime tvirtinsime, kad šių lygčių sprendinių kokybinės savybės turi būti panašios.

Daugiažingsnis skirtumų metodas yra *stabilus pradinės sąlygos atžvilgiu*, jeigu (1.61) lygties sprendiniui galioja įvertis:

$$|y^n| \leqslant C \max(|y^0|, |y^1|, \ldots, |y^{m-1}|),\ n = m, m+1, \ldots, N. \tag{1.62}$$

(1.61) lygtis yra atskiras skirtumų lygčių su pastoviaisiais koeficientais atvejis. Jų sprendimo metodai panašūs į diferencialinių lygčių su pastoviaisiais koeficientais sprendimo būdus. Bendrasis šios lygties sprendinys išreiškiamas atskirųjų sprendinių

$$y(t_n) = q^n$$

tiesine kombinacija. Įstatę atskirąjį sprendinį į (1.61) lygtį, gausime daugiažingsnio skirtumų metodo *charakteristinę lygtį*:

$$F(q) \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k q^{m-k} = 0\,.$$

Stabilumo įverčio galiojimas priklauso nuo charakteristinės lygties sprendinių. Pažymėkime q_{max} charakteristinės lygties didžiausio modulio šaknį:

$$|q| \leqslant |q_{max}|\,.$$

Iš (1.56) lygčių sistemos pirmosios lygties gauname, kad

$$F(1) = \sum_{k=0}^{m} a_k = 0\,,$$

taigi $q = 1$ yra charakteristinės lygties šaknis, todėl $|q_{max}| \geqslant 1$.

Tarkime, kad $|q_{max}| > 1$, tada ją atitinkantis atskirasis sprendinys lygus

$$y^n = \delta q_{max}^{n-m+1}\,.$$

Matome, kad (1.61) uždavinio sprendinys y^j, kuris taškuose $t_j,\ j = 0, 1, \ldots, m-1$ yra ne didesnis už δ, vėliau didėja eksponentiškai greitai, todėl (1.62) stabilumo įvertis negali galioti.

Lieka išnagrinėti atvejį, kai $|q_{\max}| = 1$, bet šis charakteristinės lygties sprendinys yra $l > 1$ kartotinumo. Tada (1.61) skirtumų lygties atskirasis sprendinys yra tokio pavidalo:

$$y^n = \delta q_{\max}^{n-m+1} \left(\frac{n}{m-1}\right)^{l-1}\,,$$

čia $m > 1$, nes priešingu atveju charakteristinė lygtis kartotinių šaknų neturėtų. Matome, kad laiko intervale $[0, T]$ sprendinys gali išaugti iki $\mathcal{O}\Big(\delta\Big(\dfrac{T}{\tau}\Big)^{l-1}\Big)$ dydžio, todėl (1.62) stabilumo nelygybė negalioja ir šiuo atveju.

Taigi gauname tokią būtinąją sąlygą, kurią turi tenkinti bet kuri efektyvi skirtumų schema, naudojama PDL pradiniam uždaviniui spręsti.

Šaknų kriterijus. *Daugiažingsnis metodas (1.47) tenkina šaknų kriterijų, jei visos šio metodo charakteristinės lygties šaknys priklauso sričiai $|q| \leqslant 1$, o tarp šaknų kurių modulis lygus vienetui nėra kartotinių.*

Net ir toks paprastas stabilumo kriterijus smarkiai susiaurina praktiniams skaičiavimams taikytinų daugiažingsnių skirtumų metodų klasę.

1.5 teorema. *Jeigu daugiažingsnis skirtumų metodas tenkina šaknų kriterijų, tai aukščiausia galima aproksimacijos eilė yra arba*

a) $p = m$, jei schema yra išreikštinė, arba

b) $p = m + 1$, jei m – nelyginis skaičius, arba $p = m + 2$, jei m – lyginis skaičius ir schema yra neišreikštinė.

Pažymėtina, kad Adamso metodai visada tenkina šaknų kriterijų. Todėl Adamso ir Bashfortho metodas yra išreikštinio daugiažingsnio metodo, turinčio aukščiausią galimą aproksimacijos eilę, pavyzdys. Jei m yra nelyginis skaičius, tai

Adamso ir Moultono metodas irgi yra analogiško neišreikštinio metodo pavyzdys. (1.59) metodas yra neišreikštinis dvižingsnis metodas, turintis aukščiausią ketvirtą aproksimacijos tikslumo eilę.

Be įrodymo suformuluosime teoremą apie daugiažingsnio skirtumų metodo sprendinio konvergavimą.

1.6 teorema. *Tegul visos charakteristinės lygties šaknys tenkina šaknų kriterijų. Be to, tegul* $||F_u'(t, U)|| \leqslant L$*. Tada, kai yra pakankamai mažos parametro* τ *reikšmės, galioja toks tikslumo įvertis:*

$$\|Z^n\| \leqslant e^{C_2 T} \Big(\max_{0 \leqslant j \leqslant m-1} \|Z^j\| + C_3 \sum_{j=m}^{n} \tau \|\Psi^j\| \Big) . \tag{1.63}$$

Vėl gavome teiginį, kad stabilių skaitinių metodų sprendinio tikslumo eilė sutampa su šių metodų aproksimacijos tikslumo eile.

Pradinių m artinių skaičiavimas

Daugiažingsnio skirtumų metodo formulę (1.47) galime naudoti tik nuo m-ojo laiko sluoksnio. Todėl pradėdami skaičiavimus turime žinoti artinius

$$Y^0, \; Y^1, \; \dots, \; Y^{m-1} .$$

Sprendinį Y^0 randame iš pradinės diferencialinio uždavinio sąlygos. Kitus artinius apskaičiuojame kokiu nors kitu skaitiniu metodu, pavyzdžiui Rungės ir Kuto metodu. Iš daugiažingsnio skirtumų metodo tikslumo įverčio (1.63) gauname, kad šių pradinių artinių tikslumas turi būti ne blogesnis negu metodo aproksimacijos tikslumas. Kadangi ieškome tik fiksuoto skaičiaus pradinių reikšmių, tai jas galime apskaičiuoti skaitiniais metodais, kurių tikslumo eilė yra vienetu žemesnė nei pagrindinio daugiažingsnio skirtumų metodo. Papildomą tikslumo eilę įneša daugiklis τ, iš kurio dauginame lokaliąją paklaidą įvertindami vieno žingsnio paklaidos kitimą.

Pateiksime pavyzdį, kaip gali būti sprendžiamas pradinių sąlygų parinkimo uždavinys.

1.9 pavyzdys. 4-žingsnio Adamso ir Bashfortho metodo pradinės sąlygos. Nagrinėkime ketvirtosios tikslumo eilės išreikštinę Adamso schemą, kurią sukonstravome 1.5 pavyzdyje:

$$\frac{Y^n - Y^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{24}\big(55F_{n-1} - 59F_{n-2} + 37F_{n-3} - 9F_{n-4}\big) .$$

Matome, kad šiai formulei reikalingos keturios pradinės reikšmės Y^0, Y^1, Y^2, Y^3. Artinį Y^0 randame iš diferencialinio uždavinio pradinės sąlygos. Kitus tris artinius $Y^1,\ Y^2$ ir Y^3 apkaičiuojame, pavyzdžiui, išreikštiniu trijų pakopų Rungės ir Kuto metodu (1.25):

$$\begin{cases} K_1 = F(t_n, Y^n), \\ K_2 = F(t_n + \dfrac{\tau}{2}, Y^n + \dfrac{\tau}{2} K_1), \\ K_3 = F(t_n + \tau, Y^n - \tau K_1 + 2\tau K_2), \\ Y^{n+1} = Y^n + \dfrac{\tau}{6}\big(K_1 + 4K_2 + K_3\big), \quad n = 0, 1, 2. \end{cases}$$

Kadangi šio Rungės ir Kuto metodo aproksimavimo paklaida tenkina nelygybę $\|\Psi^j\| \leq C\tau^3$, tai iš 1.3 teoremos konvergavimo įverčio gauname, kad

$$\|Z^n\| \leq t_3 C \max_{0 \leq j \leq 3} \|\Psi^j\| \leq 3C\tau^4, \quad n = 1, 2, 3\,.$$

Todėl (1.9) daugiažingsnio metodo su pradinėmis sąlygomis Y^1, Y^2, Y^3, apskaičiuotomis Rungės ir Kuto metodu, tikslumo eilė yra ketvirtoji.