## 3.3. Baigtinių skirtumų schemos konvergavimo analizė

Srityje $Q_T = \big\{(x,t): \ \ 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T\big\}$ spręsime parabolinį uždavinį

$$\begin{cases} b(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) - q(x)u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T\,, \\ u(0,t) = \mu_0(t), \quad u(1,t) = \mu_1(t), \quad 0 < t \leqslant T\,, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\,. \end{cases} \tag{3.13}$$

Tarsime, kad diferencialinės lygties koeficientai tenkina sąlygas, garantuojančias uždavinio paraboliškumą

$$k(x) \geqslant k_0 > 0, \quad b(x) \geqslant b_0 > 0, \quad q(x) \geqslant 0\,.$$

Aproksimuokime (3.13) uždavinį vienparametre baigtinių skirtumų schema

$$\begin{cases} b_i y_t = \big(a_{i-0.5} y^{\sigma}_{\bar{x}}\big)_x - d_i y^{\sigma} + \varphi\,, \\ y^n_0 = \mu_0(t_n), \quad y^n_N = \mu_1(t_n), \ \ t^n \in \omega_\tau\,, \\ y^0(x_i) = u_0(x_i), \quad x_i \in \omega_h\,. \end{cases} \tag{3.14}$$

Įrodysime, kad baigtinių skirtumų schemos sprendinys konverguoja į diferencialinio uždavinio sprendinį, ir įvertinsime šio konvergavimo greitį.

Pažymėkime $z_i = y_i - u_i$ baigtinių skirtumų schemos sprendinio globaliąją paklaidą, ši funkcija yra uždavinio

$$\begin{cases} b_i z_t = \big(a_{i-0.5} z^{\sigma}_{\bar{x}}\big)_x - d_i z^{\sigma} + \psi\,, \\ z^n_0 = 0, \quad z^n_N = 0, \ \ t^n \in \omega_\tau\,, \\ z^0(x_i) = 0, \quad x_i \in \omega_h \end{cases} \tag{3.15}$$

sprendinys, čia

$$\psi = -b_i u_t + \big(a_{i-0.5} u^{\sigma}_{\bar{x}}\big)_x - d_i u^{\sigma} + \varphi$$

yra baigtinių skirtumų schemos aproksimacijos paklaida. Lygties koeficientus imkime, pavyzdžiui, tokius:

$$a_{i-0,5} = k(x_{i-0,5}), \ \ d_i = q(x_i), \ \ \varphi^n_i = f(x_i, t^{n+\sigma})\,.$$

Tada, remdamiesi $3.4$ poskyryje gautais rezultatais, įvertiname (3.14) baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaidą

$$|\psi^n_i| \leqslant \begin{cases} C_A(\tau + h^2), \quad \text{jei } \sigma \neq 0,5, \\ C_A(\tau^2 + h^2), \ \ \text{jei } \sigma = 0,5. \end{cases} \tag{3.16}$$

### 3.3.1. Stabilumo analizė maksimumo principu

Pirmiausia pateiksime stabilumo apibrėžimą. (3.14) baigtinių skirtumų schemą vadiname *stabiliąja*, jei paklaidų uždavinio sprendinys tenkina nelygybę

$$\|\hat{Z}\|_1 \leqslant \big(1 + C\tau\big)\|Z\|_1 + C_2\tau\|\Psi\|_2\,, \tag{3.17}$$

čia $\|\cdot\|_1$ ir $\|\cdot\|_2$ yra dvi vektorių normos.

Paraboliniams uždaviniams dažnai pavyksta įrodyti ir griežtesnę stabilumo nelygybę

$$\|\hat{Z}\|_1 \leqslant \|Z\|_1 + C_2\tau\|\Psi\|_2\,. \tag{3.18}$$

#### Konvergavimas

Rekursyviai pritaikę (3.17) nelygybę, gauname globaliosios paklaidos įvertį (analogišką rezultatą įrodėme 1 skyriuje tirdami paprastųjų diferencialinių lygčių sistemų skaitinių sprendimo metodų konvergavimą):

$$\|Y^n - U^n\|_1 \le C_2 t^n e^{Ct^n} \max_{0\leqslant j\leqslant n} \|\Psi^j\|_2\,. \tag{3.19}$$

Jei išpildyta (3.18) stabilumo nelygybė, tai teisingas globaliosios paklaidos įvertis

$$\|Y^n - U^n\|_1 \le C_2 t^n \max_{0\leqslant j\leqslant n} \|\Psi^j\|_2\,. \tag{3.20}$$

#### Maksimumo principas stabilumo analizėje

Šiame paragrafe gausime stabilumo įvertį diskrečiojoje $C$ normoje

$$\|Z\|_{C(\omega_h)} = \max_{0<i<N} |z_i|\,.$$

Nagrinėsime (3.15) paklaidų uždavinį. Jį užrašysime koordinatčiu būdu ir išskirsime diagonalųjį narį $(n+1)$-uoju laiko momentu

$$\begin{aligned}\Big(\,b_i + \sigma\gamma\,(a_{i+0,5} + a_{i-0,5}) + \tau\sigma d_i\,\Big)\hat{z}_i = {} & \sigma\gamma\, a_{i+0,5}\hat{z}_{i+1} + \sigma\gamma\, a_{i-0,5}\hat{z}_{i-1} \\ & + (1-\sigma)\gamma\, a_{i+0,5} z_{i+1} + (1-\sigma)\gamma\, a_{i-0,5} z_{i-1} \\ & + \Big(\,b_i - (1-\sigma)\gamma\,(a_{i+0,5} + a_{i-0,5}) - (1-\sigma)\tau d_i\,\Big) z_i + \tau\psi_i\,.\end{aligned}$$

**Visiškai neišreikštinė baigtinių skirtumų schema.** Imkime $\sigma = 1$. Tada paklaidų uždavinio lygtis yra tokia

$$\big(\, b_i + \gamma(a_{i+0,5} + a_{i-0,5}) + \tau d_i \,\big)\hat{z}_i = b_i z_i + \gamma(a_{i+0,5}\hat{z}_{i+1} + a_{i-0,5}\hat{z}_{i-1}) + \tau\psi_i^n \,.$$

Tegu didžiausioji paklaidos reikšmė yra pasiekiama taške $x_j$

$$\|\hat{Z}\|_{C(\omega_h)} = |\hat{z}_j| \,.$$

Iš paklaidų lygties, užrašytos taške $x_j$, gauname $|\hat{z}_j|$ įvertį

$$\big(\, b_j + \gamma\,(a_{j+0,5} + a_{j-0,5}) + \tau d_j \,\big)|\hat{z}_j| \leqslant \gamma\,(a_{j+0,5} + a_{j-0,5})\,|\hat{z}_j| + b_j|z_j| + \tau|\psi_j^n| \,.$$

Pasinaudoję uždavinio paraboliškumo sąlygomis, įrodome nelygybę

$$\|\hat{Z}\|_{C(\omega_h)} \leqslant \|Z\|_{C(\omega_h)} + \frac{\tau}{b_0}\|\Psi\|_{C(\omega_h)} \,.$$

Kadangi visiškai neišreikštinės baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaida tenkina įvertį

$$\|\Psi\|_{C(\omega_h)} \leqslant C_A(\tau + h^2),$$

tai iš (3.20) nelygybės gauname šios schemos globaliosios paklaidos įvertį

$$\|Z^n\|_{C(\omega_h)} \leqslant C\,t^n\,(\tau + h^2) \,.$$

**Išreikštinė baigtinių skirtumų schema.** Imkime $\sigma = 0$. Tada paklaidų uždavinio lygtis yra tokia

$$b_i\hat{z}_i = \gamma\,a_{i+0,5}z_{i+1} + \gamma\,a_{i-0,5}z_{i-1} + \big(\, b_i - \gamma\,(a_{i+0,5} + a_{i-0,5}) - \tau d_i \,\big)z_i + \tau\psi \,.$$

Įvertinsime didžiausios paklaidos $|\hat{z}_j|$ reikšmę

$$b_j|\hat{z}_j| \leqslant \big(\,|\,b_j - \gamma\,(a_{j+0,5}+a_{j-0,5}) - \tau d_j\,| + \gamma\,(a_{j+0,5}+a_{j-0,5})\,\big)\|Z\|_{C(\omega_h)} + \tau|\psi_j| \,.$$

Stabilumo nelygybė yra išpildyta, jei

$$|\,b_j - \gamma\,(a_{j+0,5} + a_{j-0,5}) - \tau d_j\,| + \gamma\,(a_{j+0,5} + a_{j-0,5}) \leqslant b_j \,.$$

Spręsdami šią nelygybę, gauname pakankamą stabilumo sąlygą

$$\tau \leqslant \frac{b_i h^2}{a_{i+0,5} + a_{i-0,5} + d_i h^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \,.$$

Jei diferencialinės lygties koeficientai tenkina sąlygas

$$0 < k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1, \quad b(x) \geqslant b_0 > 0, \quad 0 \leqslant q(x) \leqslant q_1,$$

tai išreikštinės baigtinių skirtumų schemos pakankamoji stabilumo sąlyga yra

$$\tau \leqslant \frac{b_0 h^2}{2k_1 + q_1 h^2}\,. \tag{3.21}$$

Nagrinėkime (3.13) diferencialinį uždavinį su pastoviaisiais koeficientais. Tada maksimumo principo metodu gautasis parametro $\tau$ apribojimas sutampa su būtinąja stabilumo sąlyga, kurią suradome taikydami Neimano stabilumo kriterijų.

Pasinaudoję (3.20) nelygybe ir išreikštinės baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaidos įverčiu

$$\|\Psi\|_{C(\omega_h)} \leqslant C_A(\tau + h^2)\,,$$

įrodome, kad išreikštinės schemos globalioji paklaida, kai parametras $\tau$ tenkina pakankamąją stabilumo sąlygą (3.21), įvertinama nelygybe

$$\|Z^n\|_{C(\omega_h)} \leqslant C\,t^n\,(\tau + h^2)\,.$$

**Vienparametrė baigtinių skirtumų schema.** Nagrinėsime bendrąjį vienparametrės baigtinių skirtumų schemos atvejį. Iš paklaidų lygties gauname įvertį

$$\begin{aligned}(b_j + \tau\sigma d_j)\,|\hat{z}_j| \leqslant \Big(&|b_j - (1-\sigma)\gamma\,(a_{j+0,5} + a_{j-0,5}) - \tau(1-\sigma)d_j| \\ &+ (1-\sigma)\gamma\,(a_{j+0,5} + a_{j-0,5})\Big)\,\|Z\|_{C(\omega_h)} + \tau\|\Psi\|_{C(\omega_h)}\,.\end{aligned}$$

Jei patenkinta nelygybė

$$(1-\sigma)\gamma\,(a_{i+0,5} + a_{i-0,5}) + \tau(1-\sigma)d_i \leqslant b_i, \quad 0 < i < N\,,$$

tai vienparametrė baigtinių skirtumų schema yra stabilioji

$$\|\hat{Z}\|_{C(\omega_h)} \leqslant \|Z\|_{C(\omega_h)} + \frac{\tau}{b_0}\|\Psi\|_{C(\omega_h)}\,.$$

Pakankamąją stabilumo sąlygą galime užrašyti ir kaip parametro $\tau$ apribojimą

$$\tau \leqslant \frac{b_0 h^2}{(2k_1 + q_1 h^2)(1-\sigma)}\,. \tag{3.22}$$

Prisiminkime, kad tirdami stabilumą Neimano kriterijumi, gavome būtinąją stabilumo sąlygą, kuri yra kur kas silpnesnė:

$$\tau \leqslant \frac{b_0 h^2}{(2k_1 + q_1 h^2)(1 - 2\sigma)} \; .$$

Tačiau maksimumo principas garantuoja ne tik stabilumą, bet ir papildomas svarbias sprendinio savybes, todėl ir reikalavimai diskretiesiems parametrams $\tau$ ir $h$ yra griežtesni.

Naudodamiesi stabilumo nelygybe ir vienparametrės baigtinių skirtumų schemos aproksimacijos paklaidos įverčiais

$$\|\Psi\|_{C(\omega_h)} \leqslant \begin{cases} C_A(\tau + h^2), & \text{jei} \;\; \sigma \neq \dfrac{1}{2}, \, \sigma^* \, , \\ C_A(\tau^2 + h^2), & \text{jei} \;\; \sigma = \dfrac{1}{2} \, , \\ C_A(\tau^2 + h^4), & \text{jei} \;\; \sigma = \sigma^* \, , \end{cases}$$

įrodome, kad neišreikštinės schemos globalioji paklaida, kai parametras $\tau$ tenkina pakankamąją stabilumo sąlygą (3.22), įvertinama nelygybe

$$\|Z^n\|_{C(\omega_h)} \leqslant t^n \begin{cases} C(\tau + h^2), & \text{jei} \;\; \sigma \neq \dfrac{1}{2}, \, \sigma^* \, , \\ C(\tau^2 + h^2), & \text{jei} \;\; \sigma = \dfrac{1}{2} \, , \\ C(\tau^2 + h^4), & \text{jei} \;\; \sigma = \sigma^* \, . \end{cases}$$

### 3.3.2. Stabilumo analizė $\mathrm{L}_2$ normoje

Skirtumų funkcijų, tenkinančių kraštines sąlygas $y_0 = 0$ ir $y_N = 0$, aibėje apibrėžkime operatorių

$$AY = -\big(a_{i-0,5} y_{\bar{x}}\big)_x + d_i y, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \, .$$

Pirmiausia suformuluosime lemą apie šio operatoriaus savybes.

**3.2 lema.** *Operatorius $A$ yra savijungis, t. y. teisinga tokia lygybė*

$$\big(AY, \, V\big) = \big(Y, \, AV\big) \, .$$

*Įrodymas.* Pasinaudoję Grino formule ir kraštinėmis sąlygomis $y_0 = 0$, $y_N = 0$, gauname lygybes

$$\big(AY, \, V\big) := \big(-(a y_{\bar{x}})_x, \, v\big) + \big(dy, \, v\big) = \big(a y_{\bar{x}}, \, v_{\bar{x}}\big] + \big(dy, \, v\big) \, ,$$

$$\big(AV, \, Y\big) = \big(a v_{\bar{x}}, \, y_{\bar{x}}\big] + \big(dy, \, v\big) \, .$$

Lema įrodyta. □

Todėl operatoriaus $A$ tikrinių vektorių

$$AY_k = \lambda_k Y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

sistema yra *pilnoji* ir *ortogonalioji*

$$\big(Y_m,\, Y_k\big) = 0, \text{ jei } m \neq k\,.$$

Tikrinių vektorių sistemą $\{Y_k\}$ galime ir ortonormuoti

$$V_i = \frac{1}{\|Y_i\|}\, Y_i\,,$$

tada vektoriai $\{V_k\}$ tenkina sąlygą

$$\big(V_m,\, V_k\big) = \begin{cases} 1, & \text{jei } m = k \\ 0, & \text{jei } m \neq k\,. \end{cases}$$

Kadangi vektorių sistema yra pilnoji, tai bet kurią skirtumų funkciją $y$, intervalo galuose įgyjančią nulines reikšmes $y_0 = 0$, $y_N = 0$, galime išreikšti tiesine vektorių $V_k$ kombinacija

$$y(x_i) = \sum_{j=1}^{N-1} c_j v_j(x_i), \quad x_i \in \omega_h\,.$$

Naudodamiesi tikrinių vektorių sistemos $\{\, V_k \,\}$ ortonormuotumu, apskaičiuojame funkcijos $y(x_i)$ normą

$$\|Y\|^2 := \big(Y,\, Y\big) = \sum_{j=1}^{N-1} c_j^2\,. \tag{3.23}$$

Nagrinėkime baigtinių skirtumų schemos (3.14) sprendinio globaliosios paklaidos ir aproksimavimo paklaidos skleidinius

$$z(x_i, t^n) = \sum_{j=1}^{N-1} c_j(t^n) v_j(x_i), \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}\,, \tag{3.24}$$

$$\psi(x_i, t^n) = \sum_{j=1}^{N-1} r_j(t^n) v_j(x_i)\,.$$

Įrašę šiuos skleidinius į paklaidų lygtį (3.15), gausime lygybę

$$\sum_{j=1}^{N-1} v_j(x_i)\Big(\frac{\hat{c}_j - c_j}{\tau} + \sigma\lambda_j\hat{c}_j + (1-\sigma)\lambda_j c_j - r_j\Big) = 0\,.$$

Kadangi tikrinių vektorių sistema $\{V_k\}$ yra tiesiškai nepriklausoma, tai

$$\hat{c}_j = q_j c_j + \frac{\tau}{1+\sigma\lambda_j\tau} r_j\,,$$

čia $q_j$ yra stabilumo daugiklis

$$q_j = \frac{1-(1-\sigma)\lambda_j\tau}{1+\sigma\lambda_j\tau}\,.$$

Įrašę šiuos koeficientus į (3.24) lygybę, gausime tokią globaliosios paklaidos formulę

$$\begin{aligned}\hat{z}_i &= \sum_{j=1}^{N-1} q_j c_j v_j(x_i) + \tau\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{1+\tau\sigma\lambda_j} r_j v_j(x_i) \\ &= \tilde{z}_i + \tau\tilde{\psi}_i\,.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Iš trikampio nelygybės išeina, kad

$$\|\hat{Z}\| \leqslant \|\tilde{Z}\| + \tau\|\tilde{\Psi}\|\,. \tag{3.26}$$

Toliau įvertinsime funkcijas $\tilde{Z}$ ir $\tilde{\Psi}$. Naudosimės skirtumų funkcijos $L_2$ normos skaičiavimo formule (3.23). Iš (3.25) lygybės gauname, kad

$$\begin{aligned}\|\tilde{Z}\|^2 &= \sum_{j=1}^{N-1} q_j^2 c_j^2 \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant N-1} q_j^2 \sum_{j=1}^{N-1} c_j^2 \\ &= \max_{1\leqslant j\leqslant N-1} q_j^2\,\|Z\|^2\,.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Rasime sąlygas, kada

$$|q_j| \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1\,.$$

Nelygybes perrašykime tokiu būdu:

$$-1 - \sigma\lambda_j\tau \leqslant 1 - (1-\sigma)\tau\lambda_j \leqslant 1 + \sigma\lambda_j\tau\,.$$

Jos yra išpildytos, jei
$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_{N-1}}\,.$$
Iš 3.1 lemos gauname, kad $\lambda_{N-1} < \dfrac{4}{h^2}$, todėl nelygybės $|q_j| \leqslant 1$ yra išpildytos, jei parametras $\sigma$ tenkina sąlygą
$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}\,.$$
Tada iš (3.26) ir (3.27) nelygybių gauname stabilumo pradinės sąlygos atžvilgiu įvertį
$$\|\tilde{Z}\| \leqslant \|Z\|\,.$$

Nagrinėkime funkcijos $\tilde{\Psi}$ normą
$$\|\tilde{\Psi}\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{N-1} \frac{r_j^2}{(1+\tau\sigma\lambda_j)^2} \leqslant \frac{1}{\varepsilon_\sigma^2}\|\Psi^n\|^2\,,$$
čia laikėmės prielaidos, kad
$$1 + \tau\sigma\lambda_j \geqslant \varepsilon_\sigma > 0\,.$$
Įvertinsime konstantą $\varepsilon_\sigma$. Jeigu $\sigma \geqslant 0$, tai trivialiai gauname, kad galime imti $\varepsilon_\sigma = 1$. Nagrinėkime didesnio tikslumo schemą, kai $\sigma = \sigma^*$, tada teisingas įvertis
$$\varepsilon_\sigma = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}\right)\frac{4\tau}{h^2} = \frac{2}{3} + \frac{2\tau}{h^2} \geqslant \frac{2}{3}\,.$$

Remdamiesi stabilumo nelygybe ir (3.20) įverčiu, įrodome tokį teiginį:

**3.1 teorema.** *Jeigu $\sigma \geq 0,5 - (1-\varepsilon)\frac{h^2}{4\tau}$, tai vienaparametrės baigtinių skirtumų schemos sprendinys konverguoja į $(3.13)$ diferencialinio uždavinio sprendinį ir yra teisingas globaliosios paklaidos įvertis*
$$\|Z^n\| \leqslant C\,t_n \max_{0\leqslant j\leqslant n-1} \|\Psi^j\|, \quad t^n \in \omega_\tau\,.$$

Matome, kad pakankamoji vienparametrės baigtinių skirtumų schemos stabilumo $L_2$ normoje sąlyga yra tokia pati kaip ir Neimano kriterijaus būtinoji stabilumo sąlyga.