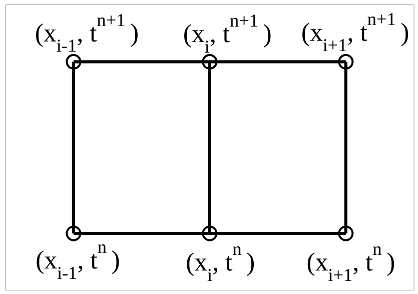
3.2. Neišreikštinė baigtinių skirtumų schema

Šiame poskyryje nagrinėsime baigtinių skirtumų schemą, kurią konstruodami naudosime diskrečiojo tinklo šabloną, pavaizduotą 3.3 pav.



3.3 pav. Neišreikštinės vienparametrės baigtinių skirtumų schemos šablonas

Diferencialinį kraštinį uždavinį (3.1) aproksimuokime baigtinių skirtumų schema

$$\begin{cases} y_t = y^{\sigma}_{\bar{x}x} + f(x_i, t^{n+\sigma}), \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,, \\ y^n_0 = \mu_0(t^n), \;\; y^n_N = \mu_1(t^n), \quad t^n \in \omega_\tau\,, \\ y^0_i = u_0(x_i), \quad x_i \in \overline{\omega}_h\,, \end{cases} \tag{3.7}$$

čia pažymėjome diskrečiosios funkcijos svertinį vidurkį

$$y^\sigma = \sigma\hat{y} + (1-\sigma)y\,.$$

Kadangi šios schemos šablono $(n+1)$-ajame sluoksnyje yra trys taškai, tai tokia schema yra neišreikštinė. Ją vadinsime *neišreikštine vienparametre* baigtinių skirtumų schema.

Toliau išskirsime du svarbius (3.7) baigtinių skirtumų schemos atvejus. Kai parametras $\sigma = 1$, turime *visiškai neišreikštinę* baigtinių skirtumų schemą

$$y_t = \hat{y}_{\bar{x}x} + f(x, t^{n+1})\,.$$

Kai $\sigma = \frac{1}{2}$, turime *simetrinę* baigtinių skirtumų schemą, kurią dar vadiname *Kranko ir Nikolsono* (*Crank – Nicolson*) schema:

$$y_t = \frac{\hat{y}_{\bar{x}x} + y_{\bar{x}x}}{2} + f(x, t^{n+0,5})\,.$$

Pabrėžtina, kad ir išreikštinė baigtinių skirtumų schema yra atskiras (3.7) schemos atvejis, kai $\sigma = 0$.

3.2.1. Realizavimo algoritmas ir aproksimavimo paklaidos analizė

Pirmiausia aptarsime (3.7) baigtinių skirtumų schemos realizavimo algoritmą. Ši schema yra ekvivalenti tiesinių lygčių sistemai

$$\begin{cases} -\dfrac{\sigma}{h^2}\hat{y}_{i-1} + \left(\dfrac{1}{\tau} + \dfrac{2\sigma}{h^2}\right)\hat{y}_i - \dfrac{\sigma}{h^2}\hat{y}_{i+1} = g, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,, \\ \hat{y}_0 = \mu_0(t^{n+1}), \quad \hat{y}_N = \mu_1(t^{n+1}), \quad t^{n+1} \in \omega_\tau\,, \end{cases} \tag{3.8}$$

čia pažymėjome

$$g = f_i^{n+\sigma} + \frac{1-\sigma}{h^2}\big(y_{i-1}^n + y_{i+1}^n\big) + \Big(\frac{1}{\tau} - \frac{2(1-\sigma)}{h^2}\Big)y_i^n\,.$$

Iš viso turime $(N-1)K$ nežinomųjų. Tačiau (3.8) sitemos lygtys kiekviename žingsnyje atsiskiria ir gauname tiesinių lygčių sistemą

$$A\hat{Y} = G\,,$$

čia A yra trijįstrižainė matrica, o $\hat{Y}$ ir G yra vektoriai

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} y_1^{n+1} \\ \vdots \\ y_{N-1}^{n+1} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g_1^n \\ \vdots \\ g_{N-1}^n \end{pmatrix}.$$

Tokių sistemų sprendinį taupiai apskaičiuojame perkelties metodu.

Perkelties metodas yra stabilusis, kai matrica A yra diagonaliai vyraujanti. Ši sąlyga yra išpildyta (3.8) tiesinių lygčių sistemoje, jei

$$\Big|\frac{1}{\tau} + \frac{2\sigma}{h^2}\Big| \geqslant \frac{2|\sigma|}{h^2}\,.$$

Išsprendę nelygybę, gauname sąlygą

$$\sigma \geqslant -\frac{h^2}{4\tau}\,,$$

garantuojančią, kad egzistuoja vienintelis neišreikštinės baigtinių skirtumų schemos sprendinys.

Neišreikštinės schemos aproksimacijos paklaida

Pirmiausia ištirsime visiškai neišreikštinės baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaidą

$$\psi = \hat{u}_{\bar{x}x} + f(x_i, t^{n+1}) - u_t\,.$$

Tarkime, kad $u \in C_4^2(Q_T)$, tada teisingi įverčiai

$$\frac{\hat{u}-u}{\tau} = \frac{\partial u(x,t^{n+1})}{dt} + \mathcal{O}(\tau)\,,$$
$$\hat{u}_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 \hat{u}(\tilde{x})}{\partial x^4}\,,$$

todėl šios schemos aproksimavimo paklaida yra tokia

$$|\psi| = \mathcal{O}(\tau + h^2)\,.$$

Panašiai įrodome, kad ir vienparametrės baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaida irgi yra įvertinama nelygybe

$$|\psi| \leqslant C(\tau + h^2)\,.$$

Egzistuoja dvi specialios parametro σ reikšmės, kai baigtinių skirtumų schemos aproksimacija yra didesnės tikslumo eilės. Pirmiausia parodysime, kad Kranko ir Nikolsono schemos aproksimacija ir koordinatės t atžvilgiu yra antrosios tikslumo eilės.

Funkciją $u(x,t)$ skleisime Teiloro eilute taško $(x_i, t^{n+0,5})$ atžvilgiu

$$u(x_i,t^{n+1}) = \bar{u}_i + \frac{\tau}{2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\tau^3}{48}\frac{\partial^3 u(\tilde{t})}{\partial t^3}\,, \tag{3.9}$$
$$u(x_i,t^{n}) = \bar{u}_i - \frac{\tau}{2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{\tau^3}{48}\frac{\partial^3 u(\tilde{t})}{\partial t^3}\,,$$

čia pažymėjome $\bar{u} = u(x_i, t^{n+0,5})$. Įrašę šiuos skleidinius į skirtumų formulę u_t ir padarę prielaidą $u \in C^3(Q_T)$, gausime lygybę

$$\frac{\hat{u}-u}{\tau} = \bar{u}_i + \mathcal{O}(\tau^2)\,.$$

Pasinaudoję Teiloro skleidiniais (3.9), įvertiname svertinio vidurkinimo operatoriaus tikslumą

$$u^\sigma = \bar{u} + (\sigma - 0,5)\tau\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau^2)\,, \tag{3.10}$$

todėl jei $u \in C^2(Q_T)$, tai teisinga lygybė

$$u^{0,5} = \bar{u} + \frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2 u(\tilde{t})}{\partial t^2}\,.$$

Naudodamiesi šiuo skleidiniu įvertiname ir antrosios išvestinės aproksimavimo tikslumą

$$u_{\bar{x}x}^{0,5} = \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^4 u_i(\tilde{t})}{\partial t^2\,\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u(\tilde{x},\tilde{t})}{\partial x^4}\,.$$

Todėl jei diferencialinio uždavinio sprendinio išvestinės

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^2\,\partial x^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

yra aprėžtos, tai Kranko ir Nikolsono baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaida yra įvertinama nelygybe

$$|\psi| \leqslant C(\tau^2 + h^2)\,.$$

Didesniojo tikslumo baigtinių skirtumų schema

Dabar imkime tokią parametro reikšmę

$$\sigma^* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau},$$

o laisvąjį narį aproksimuokime modifikuota formule

$$\varphi = f(x_i, t^{n+0,5}) + \frac{h^2}{12} f_{\bar{x}x}(x_i, t^{n+0,5})\,.$$

Parodysime, kad tokios vienparametrės baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaida yra didesnio tikslumo x koordinatės atžvilgiu

$$|\psi| \leqslant C(\tau^2 + h^4)\,.$$

Pažymėkime baigtinių skirtumų schemos laisvąjį narį φ. Atlikę nesudėtingus skaičiavimus, įrodome, kad vienparametrės baigtinių skirtumų schemos paklaida yra lygi

$$\psi = (\sigma - 0,5)\tau \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t\,\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial x^4} + (\sigma - 0,5)\frac{\tau h^2}{12}\frac{\partial^5 \bar{u}}{\partial t\,\partial x^4} + (\varphi - \bar{f}_i) + \mathcal{O}(\tau^2 + h^4)\,.$$

Pasinaudosime (3.1) diferencialine lygtimi ir apskaičiuosime išvestinę

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,,$$

todėl galime taip pertvarkyti aproksimavimo paklaidos išraišką

$$\psi = \Big(\sigma - 0,5 + \frac{h^2}{12}\Big)\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t\,\partial x^2} + (\sigma - 0,5)\frac{\tau h^2}{12}\frac{\partial^5 \bar{u}}{\partial t\,\partial x^4} + \Big(\varphi - \bar{f}_i - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big) + \mathcal{O}(\tau^2 + h^4)\,.$$

Iš čia išeina, kad imdami $\sigma = \sigma^*$ ir specialiai parinkdami φ, gauname didesnio tikslumo aproksimaciją.

3.2.2. Spektrinė stabilumo analizė

Naudodamiesi Neimano stabilumo kriterijumi, rasime (3.7) baigtinių skirtumų schemos būtinąsias stabilumo sąlygas. Imkime $f \equiv 0$ ir užrašykime baigtinių skirtumų schemą kaip tiesinių lygčių sistemą

$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{\tau} + AY^\sigma = 0\,.$$

Naudodami šaknų kriterijų gauname lygtį, kurią tenkina atskirojo sprendinio daugiklis

$$\frac{q-1}{\tau} = -\lambda\big(\sigma q + 1 - \sigma\big)\,,$$

čia λ yra operatoriaus A tikrinė reikšmė.

1 skyriuje jau įrodėme, kad neišreikštinis ir simetrinis Eulerio metodai tenkina būtinąją stabilumo sąlygą, todėl visiškai neišreikštinė bei Kranko ir Nikolsono baigtinių skirtumų schemos tenkina būtinąją Neimano stabilumo kriterijaus sąlygą.

Bendruoju atveju iš charakteristinės lygties randame daugiklį

$$q = \frac{1 - \tau\lambda(1-\sigma)}{1 + \tau\lambda\,\sigma}$$

ir įrodome, kad būtinoji stabilumo sąlyga $|q| \leqslant 1$ yra išpildyta, kai

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}\,. \tag{3.11}$$

Taigi ir didesniojo tikslumo baigtinių skirtumų schema tenkina būtinąją stabilumo sąlygą.

3.2.3. Trečiojo tipo kraštinės sąlygos aproksimacija

Nagrinėkime parabolinį uždavinį su trečiojo tipo kraštinėmis sąlygomis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) - q(x)u + f(x,t)\,, \\ -k(0)\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \beta_0 u(0,t) = \mu_0, \quad t > 0\,, \\ k(1)\dfrac{\partial u(1,t)}{\partial x} + \beta_1 u(1,t) = \mu_1, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Diferencialinę lygtį aproksimuokime simetrine baigtinių skirtumų schema

$$y_t = \Big(a_{i-0,5}\Big(\frac{\hat{y}+y}{2}\Big)_{\bar{x}}\Big)_x - d_i\,\frac{\hat{y}+y}{2} + \varphi_i, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,. \tag{3.12}$$

Imkime, pavyzdžiui, tokius koeficientus

$$a_{i-0,5} = k(x_{i-0,5}), \quad d_i = q(x_i), \quad \varphi_i = f(x_i, t^{n+0,5})\,,$$

tada (3.12) baigtinių skirtumų lygties aproksimacijos paklaida yra $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$ eilės dydis.

Kraštines sąlygas aproksimuokime baigtinių tūrių metodu, išnagrinėtu 2 skyriuje. Tada gausime baigtinių skirtumų lygtis (žr. (2.13) formulę):

$$\frac{h}{2}y_{t,0} = a_{0,5}\Big(\frac{\hat{y}+y}{2}\Big)_{x,0} - \big(\beta_0 + \frac{h}{2}d_0\big)\,\frac{\hat{y}_0 + y_0}{2} + \mu_0 + \frac{h}{2}\varphi_0\,,$$
$$\frac{h}{2}y_{t,N} = -a_{N-0,5}\Big(\frac{\hat{y}+y}{2}\Big)_{\bar{x},N} - \big(\beta_1 + \frac{h}{2}d_N\big)\,\frac{\hat{y}_N + y_N}{2} + \mu_1 + \frac{h}{2}\varphi_N\,.$$

Kraštinių sąlygų aproksimavimo paklaida yra (įrodykite šiuos įverčius):

$$|\psi_0| \leqslant C(\tau^2 + h^2), \quad |\psi_N| \leqslant C(\tau^2 + h^2)\,.$$

Sprendinio radimo algoritmas. Kiekviename žingsnyje sprendžiame tiesinių lygčių sistemą su triįstrižaine matrica

$$\begin{cases} \Big(\dfrac{a_{0,5}}{h^2} + \dfrac{1}{\tau} + \dfrac{\beta_0}{h} + \dfrac{d_0}{2}\Big)\hat{y}_0 - \dfrac{a_{0,5}}{h^2}\hat{y}_1 = F_1\,, \\ -\dfrac{a_{i-0,5}}{h^2}\hat{y}_{i-1} + \Big(\dfrac{a_{i-0,5}+a_{i+0,5}}{h^2} + \dfrac{2}{\tau} + d_i\Big) - \dfrac{a_{i+0,5}}{h^2}\hat{y}_{i+1} = F_i, \ 1 \leqslant i < N, \\ -\dfrac{a_{N-0,5}}{h^2}\hat{y}_{N-1} + \Big(\dfrac{a_{N-0,5}}{h^2} + \dfrac{1}{\tau} + \dfrac{\beta_1}{h} + \dfrac{d_N}{2}\Big)\hat{y}_N = F_N\,, \end{cases}$$

čia pažymėjome

$$F_0 = \frac{y_0}{\tau} + \frac{1}{h}\, a_{0,5} y_{x,0} - \Big(\frac{\beta_0}{h} + \frac{d_0}{2}\Big) y_0 + \varphi_0 + \frac{2\mu_0}{h}\,,$$

$$F_i = \frac{2y_i}{\tau} + \big(a_{i-0,5} y_{\bar{x}}\big)_x - d_i y_i + 2\varphi_i, \;\; 1 \leqslant i \leqslant N-1\,,$$

$$F_{N-1} = \frac{y_N}{\tau} - \frac{1}{h} a_{N-0,5} y_{\bar{x},N} - \Big(\frac{\beta_1}{h} + \frac{d_N}{2}\Big) y_N + \varphi_N + \frac{2\mu_1}{h}\,.$$

Šios lygčių sistemos matrica yra diagonaliai vyraujanti, todėl jos sprendinys visada egzistuoja, jį taupiai apskaičiuojame perkelties metodu.