

3 skyrius

Parabolinių uždavinių skaitinio sprendimo metodai

3.1. Išreikštinė baigtinių skirtumų schema

Šiame poskyryje spręsimė parabolinį uždavinį

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(0, t) = \mu_0(t), \quad u(1, t) = \mu_1(t), & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

čia pažymėjome apibrėžimo sritį

$$Q_T = \{ (x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \}.$$

Tarsime, kad (3.1) diferencialinio uždavinio koeficientai yra tokie, kad egzistuoja pakankamai glodus jo sprendinys.

Baigtinių skirtumų schema

Pirmiausia Q_T srityje apibrėžiame diskretųjį tinklą. Diskretizuokime erdvinę koordinatę

$$\omega_h = \{ x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad h = \frac{1}{N} \}, \quad \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{x_0, x_N\}$$

ir laiko koordinatę

$$\omega_\tau = \{ t^n = n\tau, \quad n = 1, 2, \dots, K, \quad t^K = T \}, \quad \bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{t^0\}.$$

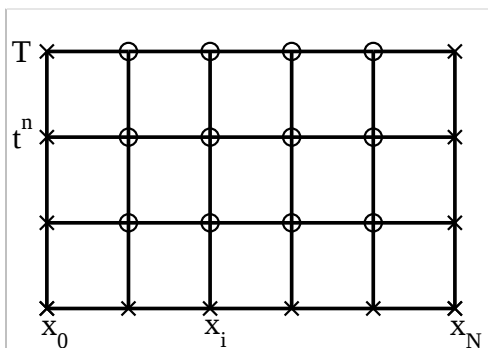
Diskrečiuoju tinklu vadiname aibę $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$. Visus jos taškus dalijame į du poaibius

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \omega_{h\tau} \cup \gamma_{h\tau}.$$

Pirmosios aibės $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$ taškus vadinsime vidiniais diskrečiojo tinklo taškais (3.1 pav. jie žymimi $\circ$), antrosios aibės

$$\gamma_{h\tau} = (\{0, 1\} \times \omega_\tau) \cup (\omega_h \times \{t^0 = 0\})$$

taškus vadinsime kraštiniais diskrečiojo tinklo taškais (3.1 pav. jie žymimi $\times$).



3.1 pav. Diskretusis tinklas $\bar{\omega}_{h\tau}$

Diskrečiojo tinklo j -ąją sluoksnį sudaro visi taškai su vienodomis laiko koordinatėmis

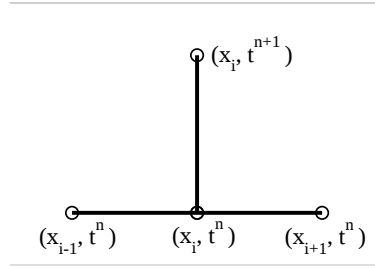
$$\omega(t^j) = \{ (x_i, t^j), \quad i = 0, 1, \dots, N \}.$$

Pažymėkime funkcijas, apibrėžtas diskrečiojo tinklo $\bar{\omega}_{h\tau}$ taškuose:

$$y_i^n = y(x_i, t^n), \quad \hat{y}_i = y_i^{n+1},$$

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad y_{\bar{x}x} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Baigtinių skirtumų schemos *šablonu* vadiname diskrečiojo tinklo $\omega_{h\tau}$ taškų aibę, kurią naudojame aproksimuodami (3.1) diferencialinę lygtį taške (x_i, t_n) . Sudarydami *išreikštinę* baigtinių skirtumų schemą imsime keturių taškų šabloną, kuris pavaizduotas 3.2 pav.



3.2 pav. Išreikštinės baigtinių skirtumų schemos šablonas

Diskrečiojo tinklo vidiniuose taškuose $\omega_{h\tau}$ diferencialinę lygtį aproksimuojame baigtinių skirtumų lygtimi

$$y_t = y_{\bar{x}x} + f(x_i, t^n), \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}. \quad (3.2)$$

Pradinę ir kraštines sąlygas pakeičiame tiksliosiomis lygybėmis

$$\begin{aligned} y_0^n &= \mu_0(t^n), \quad y_N^n = \mu_1(t^n), \quad t_n \in \omega_\tau, \\ y_i^0 &= u_0(x_i), \quad x_i \in \bar{\omega}_h. \end{aligned}$$

Tiesinių lygčių sistemą (3.2) vadiname *išreikštine baigtinių skirtumų schema*.

Išreikštinės ir *neišreikštinės* schemos terminai vartojami ir platesne prasme. Baigtinių skirtumų schema vadinama *išreikštine*, jei jos šablono $(n+1)$ -ajame sluoksnyje yra tik vienas taškas (x_i, t_{n+1}) , ir *neišreikštine*, jei tokių taškų yra daugiau nei vienas.

(3.2) lygčių sistemos sprendinį $(n+1)$ -ajame sluoksnyje taupiai apskaičiuojame naudodami išreikštinę formulę

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \tau (y_{\bar{x}x}^n + f_i^n), \quad x_i \in \omega_h$$

ir kraštines sąlygas

$$y_0^{n+1} = \mu_0(t^{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \mu_1(t^{n+1}).$$

Baigtinių skirtumų schemos aproksimacijos paklaida

Diskrečiojo sprendinio globaliąją paklaidą pažymėsime $z_i^n = y_i^n - u(x_i, t_n)$. Įrašę šią išraišką į baigtinių skirtumų schemą, gausime, kad z_i tenkina diskretųjį kraštinį

uždavini

$$\begin{cases} z_t = z_{\bar{x}x} + \psi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ z_0^n = 0, \quad z_N^n = 0, & t_n \in \omega_\tau, \\ z_i^0 = 0, & x_i \in \bar{\omega}_h, \end{cases} \quad (3.3)$$

čia ψ_i yra išreikštinės baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaida

$$\psi_i^n = -u_t + u_{\bar{x}x}^n + f(x_i, t_n).$$

Įvertinsime šios paklaidos dydį. Naudodami Teiloro skleidinius, gauname tokias lygybes

$$u_t = \frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x, \tilde{t}^n)}{\partial t^2}, \quad t^n < \tilde{t}^n < t^{n+1},$$

$$u_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(\tilde{x}, t^n)}{\partial x^4}, \quad x_{i-1} < \tilde{x}_i < x_{i+1}.$$

Pažymėkime $C_l^k(D)$ aibę funkcijų, apibrėžtų srityje D ir turinčių tolydžiąsias dalines išvestines pagal t iki k -osios imtinai ir pagal x iki l -osios imtinai. Jeigu diferencialinio uždavinio sprendinys $u \in C_4^3(Q_T)$, tai aproksimacijos paklaidą įvertiname nelygybe

$$|\psi_i| \leq C(\tau + h^2).$$

Taigi (3.2) baigtinių skirtumų schema aproksimuoja (3.1) parabolinį uždavinį, aproksimacijos tikslumo eilė yra pirmoji τ atžvilgiu ir antroji h atžvilgiu.

Remdamiesi bendrąja baigtinių skirtumų schemų sprendinio konvergavimo įrodymo metodika, toliau turime ištirti schemos stabilumą.

Neimano stabilumo kriterijus

Čia susipažinsime su paprastu kriterijumi, leidžiančiu nustatyti būtinąsias stabilumo sąlygas. Jį gauname iš šaknų kriterijaus, kurį nagrinėjome 1 skyriuje sprenddami paprastųjų diferencialinių lygčių pradinį uždavinį.

Nagrinėkime (3.3) paklaidų uždavinio lygtį, kai $\psi = 0$:

$$z_t = z_{\bar{x}x}, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \quad (3.4)$$

t. y. tirsime baigtinių skirtumų schemos stabilumą pradinės sąlygos atžvilgiu. Ieškosime šios lygties atskirųjų sprendinių, išreikštų tokiu pavidalu:

$$z_j^n(m) = q^n e^{i m x_j}, \quad m > 0.$$

(3.1) diferencialinio uždavinio sprendinys tolydžiai priklauso nuo pradinės sąlygos, be to, kai $f \equiv 0$, šio sprendinio L_2 ir C normos yra nedidėjančios koordinatės t funkcijos. Todėl baigtinių skirtumų schema yra nestabilioji, jei egzistuoja toks skaičius m , kad $|q(m)| > 1$.

Neimano stabilumo kriterijus tvirtina, kad būtinoji baigtinių skirtumų schemos stabilumo sąlyga yra

$$|q(m)| \leq 1, \quad m > 0. \quad (3.5)$$

Diskrečiųjų funkcijų, tenkinančių homogenines kraštines sąlygas $y_0 = 0$ ir $y_N = 0$, erdvėje apibrėžiamo operatorių

$$AY = -y_{\bar{x}x}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Baigtinių skirtumų uždavinį (3.4) užrašome kaip tiesinių lygčių sistemą

$$\frac{\hat{Z} - Z}{\tau} + AZ = 0.$$

Operatorius A yra labai svarbus tiriant baigtinių skirtumų schemas. Pirmiausia aptarsime šio operatoriaus tikrinių reikšmių savybes.

Operatoriaus A tikrinės reikšmės. Spręsimė operatoriaus A tikrinių reikšmių uždavinį, t. y. rasime tokias λ_j reikšmes, kada uždavinys

$$AY_k = \lambda_k Y_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.6)$$

turi netrivialųjį sprendinį $Y_j \neq 0$. Tokios λ_j reikšmės yra vadinamos operatoriaus A tikrinėmis reikšmėmis, o jas atitinkantys vektoriai Y_j – tikriniais vektoriais. Yra žinoma, kad simetrinis operatorius A turi $N-1$ tiesiškai nepriklausomą tikrinių vektorių.

Užrašysime (3.6) uždavinį koordinačių pavidalu

$$\begin{cases} -y_{\bar{x}x} = \lambda y, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = 0, & y_N = 0. \end{cases}$$

Ieškosime jo atskirųjų sprendinių

$$y_k(x_i) = \sin(\pi k x_i), \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Irašę šią funkciją į (3.6) lygtį ir kai k pertvarkę, gauname lygybę

$$\frac{2}{h^2} (1 - \cos(\pi k h)) \sin(\pi k x_i) = \lambda_k \sin(\pi k x_i).$$

Todėl Y_k yra tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinę reikšmę

$$\lambda_k = \frac{2(1 - \cos(\pi kh))}{h^2} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{\pi kh}{2} \right).$$

Suformuluosime pagrindines tikrinių reikšmių savybes.

3.1 lema. *Operatoriaus A tikrinės reikšmės tenkina nelygybes*

$$0 < 8 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{N-1} \leq \frac{4}{h^2}.$$

Irodymas. Kadangi

$$\frac{\pi(N-1)h}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{N-1}{N} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{N} \right),$$

tai argumentas $\frac{\pi kh}{2}$ visada priklauso intervalui $[0, \frac{\pi}{2}]$. Šiame intervale $\sin x$ yra didėjanti funkcija, todėl ir tikrinių reikšmių seka yra monotoniškai didėjanti. Įvertis

$$\lambda_{N-1} \leq \frac{4}{h^2}$$

išeina iš nelygybės $\sin x \leq 1$.

Dabar įvertinsime mažiausią tikrinę reikšmę λ_1 . Ją užrašysime taip:

$$\lambda_1 = \pi^2 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \alpha = \frac{\pi h}{2}.$$

Operatorius A yra apibrėžtas, jei aibei $\overline{\omega}_h$ priklauso bent trys taškai, todėl $h \leq \frac{1}{2}$,

taigi $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Funkcija $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ yra monotoniškai mažėjanti, todėl

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \geq \left(\frac{4 \sin \left(\frac{\pi}{4} \right)}{\pi} \right)^2 = \frac{8}{\pi^2}.$$

Taigi pirmąją operatoriaus A tikrinę reikšmę λ_1 galime įvertinti taip:

$$\lambda_1 \geq \pi^2 \frac{8}{\pi^2} = 8.$$

□

Tęskime išreikštinės baigtinių skirtumų schemos stabilumo analizę. Remdamesi šaknų kriterijumi, ieškosime (3.4) uždavinio atskirojo sprendinio

$$z_i^n = q^n Y_k(x_i).$$

1 skyriuje įrodėme, kad išreikštinis Eulerio metodas tenkina šaknų kriterijaus stabilumo reikalavimą, jei

$$\tau \leq \frac{2}{\lambda_{N-1}}.$$

Atsižvelgę į tikrinių reikšmių įverčius, gauname, kad išreikštinė baigtinių skirtumų schema tenkina Neimano stabilumo kriterijų, jei diskrečiojo tinklo žingsniai yra susieti nelygybe

$$\tau \leq \frac{h^2}{2}.$$

Svarbu, kad šiame pavyzdyje patiksliname atskirojo sprendinio apibrėžimą Neimano kriterijuje

$$z_j^n(m) = q^n \sin(\pi k x_i), \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

t. y. nagrinėjome tik funkcijas, įgyjančias realias reikšmes ir tenkinančias homogenines kraštines sąlygas.

3.1 pavyzdys. Didesniojo tikslumo išreikštinė baigtinių skirtumų schema. Nagrinėdami (3.2) išreikštinės baigtinių skirtumų lygties aproksimavimo paklaidą, įrodėme, jog ji yra lygi

$$\psi_i = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u_i^n}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\tau^2 + h^4).$$

Pasinaudoję būtinaja stabilumo sąlyga $\tau \leq \frac{h^2}{2}$, gauname, kad $|\psi_i| = \mathcal{O}(h^2)$.

Parodysime, kad parametą τ galima parinkti tokį, kad diferencialinės lygties aproksimacija būtų ketvirtosios tikslumo eilės. Nagrinėkime homogeninę parabolinę lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Diferencijuokime šią lygtį pagal t ir apskaičiuokime antrąją išvestinę

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

Todėl išreikštinės baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaida yra

$$\psi_i = \left(\frac{h^2}{12} - \frac{\tau}{2} \right) \frac{\partial^4 u_i^n}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\tau^2 + h^4).$$

Imdami $\tau = \frac{h^2}{6}$ gauname ketvirtosios aproksimacijos tikslumo eilės išreikštinę baigtinių skirtumų schemą

$$y_i^{n+1} = \frac{1}{6} (y_{i+1} + 4y_i + y_{i-1}).$$

Ir šiai schemai yra išpildyta būtinoji Neimano stabilumo sąlyga.