2.4. Galiorkino metodo konvergavimo analizė

Spręskime kraštinį diferencialinį uždavinį:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big(k(x)\dfrac{du}{dx}\Big) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l\,, \\ -k(0)u'(0) + \beta u(0) = \mu_0, \quad u(l) = \mu_1\,, \end{cases}$$

kurio silpnasis sprendinys tenkina uždavinį:

$$\begin{cases} \big(Lu, v\big) = 0\,, \\ u(l) = \mu_1\,, \end{cases} \tag{2.43}$$

čia pažymėjome

$$\big(Lu, v\big) = \int\limits_0^l k(x)u'v'\,dx + \int\limits_0^l q(x)uv\,dx + \big(\beta u(0) - \mu_0\big)\,v(0) - \int\limits_0^l f(x)v\,dx\,,$$

o funkcija $v \in W_2^1$

$$W_2^1 = \Big\{v : \int\limits_0^l \big((v')^2 + v^2\big)\;dx \leqslant C, \;\; v(l) = 0\Big\}\,.$$

Tarsime, kad kraštinio uždavinio koeficientai tenkina eliptiškumo sąlygą:

$$k(x) \geqslant k_0 > 0, \quad q(x) \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0\,.$$

Imkime dalimis tiesinių bandomųjų funkcijų sistemą $\big\{\varphi_j\big\}$. Tada Galiorkino metodo sprendinys yra:

$$y = \sum_{i=0}^{N} y_i\,\varphi_i(x)\,.$$

Iš (2.43) kraštinės sąlygos apskaičiuojame:

$$y_N = \mu_1\,.$$

Kitus koeficientus y_i randame spręsdami Galiorkino metodo tiesinių lygčių sistemą:

$$\big(Ly, \varphi_j\big) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1\,. \tag{2.44}$$

Nagrinėdami Galiorkino metodo konvergavimą, negalime taikyti baigtinių skirtumų metodo konvergavimo tyrimo schemos, kai įvertinama baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaida ir įrodomas sprendinio stabilumo įvertis. Priminsime, kad baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaida vadinamas dydis, gaunamas į skirtumų schemą įrašius diferencialinio uždavinio sprendinį. Iš (2.43) lygybių išeina, kad diferencialinio uždavinio silpnasis sprendinys irgi tenkina (2.44) tiesinių lygčių sistemą. Todėl taip apibrėžta Galiorkino metodo aproksimavimo paklaida yra lygi nuliui.

2.4.1. Stabilumo analizė

Ankstesnėje paskaitoje įrodytos stabilumo nelygybės neužtenka, kai tiriame diskrečiojo sprendinio konvergavimą. Todėl šiame poskyryje pirmiausia išvesime dar vieną Galiorkino metodo stabilumo įvertį. Gavę šį įvertį, išsiaiškinsime, kaip reikia tirti schemos aproksimacijos tikslumą.

S_h pažymėsime dalimis tiesinių funkcijų erdvę, kurią sudaro tiesinės bandomųjų funkcijų kombinacijos:

$$S_h = \big\{ v(x): \quad v(x) = \sum_{i=0}^{N-1} d_i \, \varphi_i(x) \big\} \,,$$

čia d_i yra bet kokie realieji skaičiai. Iš (2.44) lygčių sistemos gauname lygybę:

$$\big(Ly, v\big) = 0, \quad v \in S_h \,, \tag{2.45}$$

tai yra visos erdvės S_h funkcijos yra ir testuojamos Galiorkino artinio funkcijos. Iš (2.43) lygties matome, kad ir diferencialinio kraštinio uždavinio silpnasis sprendinys tenkina lygtį:

$$\big(Lu, v\big) = 0, \quad v \in S_h \,.$$

Iš (2.45) lygybės atėmę paskutiniąją lygybę, gausime lygtį:

$$\big(L_1(y-u), v\big) = 0, \quad v \in S_h \,,$$

čia operatorius L_1 yra apibrėžtas taip:

$$\big(L_1 u, v\big) = \int_0^l \Big(k(x)\, u' v' + q(x)\, uv\Big)\, dx + \beta\, u(0) v(0) \,.$$

Taigi diskrečiojo sprendinio paklaida $y - u$ yra ortogonali kiekvienai aibės S_h funkcijai.

Panagrinėkime Galiorkino metodo sprendinio paklaidos $z = y - u$ energijos normą:

$$\big(L_1(y-u),\, y-u\big) = \big(L_1(y-u),\, v-u\big) + \big(L_1(y-u),\, y-v\big)\,.$$

Kadangi $y - v \in S_h$, tai iš (2.45) išeina, kad $\big(L_1(y-u),\, y-v\big) = 0$. Naudodami Koši ir Buniakovskio nelygybę įvertiname paklaidos normą:

$$\begin{aligned}\big(L_1(y-u),\, y-u\big) &= \big(L_1(y-u),\, v-u\big)\\ &\leqslant \big(L_1(y-u),\, y-u\big)^{\frac{1}{2}}\big(L_1(v-u),\, v-u\big)^{\frac{1}{2}}\,.\end{aligned}$$

Abi nelygybės puses padaliję iš $\big(L_1 z, z\big)^{1/2}$, įrodome stabilumo įvertį:

$$\big(L_1(y-u),\, y-u\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \big(L_1(v-u),\, v-u\big)^{\frac{1}{2}}, \quad v \in S_h\,. \tag{2.46}$$

Matome, kad šioje normoje Galiorkino metodo sprendinio paklaida yra nedidesnė už paklaidą, kurią gauname aproksimuodami diferencialinio uždavinio sprendinį $u(x)$ erdvės S_h funkcijomis. Todėl Galiorkino metodo tikslumas priklauso nuo S_h aproksimacinių savybių.

Pertvarkysime (2.46) stabilumo įvertį taip, kad diskrečiojo sprendinio globaliosios paklaidos norma nepriklausytų nuo diferencialinės lygties koeficientų. Tarkime, kad $k(x)$ ir $q(x)$ yra iš viršaus aprėžtos funkcijos. Tada, pridėję ir eliptiškumo sąlygą, turime:

$$0 < k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1, \;\; 0 \leqslant q(x) \leqslant q_1, \;\; \beta \geqslant 0\,.$$

Iš (2.46) nelygybės ir Sobolevo įdėjimo teoremos

$$\|z\|_\infty \leq \sqrt{l}\,\|z'\|$$

gauname nelygybę:

$$\big(z', z'\big) \leqslant \frac{k_1 + l\,\beta + q_1}{k_0} \min_{v \in S_h}\Big(\big((v-u)',\, (v-u)'\big) + \big(v-u,\, v-u\big)\Big)\,.$$

Iš abiejų šios nelygybės pusių ištraukę kvadratinę šaknį, įrodome norimą stabilumo įvertį:

$$\|(y-u)'\| \leqslant C \min_{v \in S_h}\big(\|(v-u)'\| + \|v-u\|\big)\,. \tag{2.47}$$

2.4.2. Funkcijų erdvės S_h aproksimacinės savybės

Panagrinėkime funkcijų, apibrėžtų intervale $[0,l]$, erdvę $W_2^2(0,l)$:

$$W_2^2(0,l) = \Big\{ u : \int_0^l \Big(\big(u''\big)^2 + \big(u'\big)^2 + u^2 \Big)\, dx \leqslant C \Big\}.$$

Jau esame apibrėžę bet kokios tolydžiosios funkcijos $u(x)$ dalimis tiesinį interpoliuojantįjį daugianarį:

$$\pi_1 u(x) = \sum_{i=0}^{N} u(x_i)\, \varphi_i(x)\,.$$

Be įrodymo suformuluosime lemą (jos detalus įrodymas pateiktas vadovėlyje):

2.4 lema. *Jei $u(x) \in W_2^2(0,l)$, tai paklaida, kurią padarome aproksimuodami šią funkciją erdvės S_h funkcijomis, įvertinama nelygybėmis:*

$$\min_{v\in S_h} \|v-u\| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{h_{i-0,5}^4}{\pi^4} \|u''\|^2_{L_2(x_{i-1},x_i)} \Big)^{\frac12} \leqslant \frac{h^2}{\pi^2}\|u''\|\,, \tag{2.48}$$

$$\min_{v\in S_h} \|v'-u'\| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{h_{i-0,5}^2}{\pi^2} \|u''\|^2_{L_2(x_{i-1},x_i)} \Big)^{\frac12} \leqslant \frac{h}{\pi}\|u''\|\,, \tag{2.49}$$

čia pažymėjome $h = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} h_{i-0,5}$.

2.4.3. Konvergavimo analizė

Šiame poskyryje įrodysime Galiorkino metodo artinio konvergavimą ir įvertinsime šio artinio tikslumą.

2.3 teorema. *Jei $u \in W_2^2(0,l)$ ir bandomųjų funkcijų aibę sudaro dalimis tiesinės interpoliacinės funkcijos $\big\{\varphi_i(x)\big\}$, tai Galiorkino metodo sprendinio $y(x)$ paklaida yra įvertinama nelygybėmis:*

$$\|y-u\| \leqslant Ch, \quad \|\,(y-u)'\,\| \leqslant Ch^2. \tag{2.50}$$

Įrodymas. Iš pagrindinio stabilumo įverčio (12.11) ir 2.4 lemos gauname sprendinio išvestinės globaliosios paklaidos įvertį:

$$\| (y-u)' \| \leqslant Ch \|u''\| .$$

Paklaidos įvertis L_2 normoje yra įrodomas panaudojant pagalbinio dualiojo uždavinio sprendinio savybes ir gautąjį įvertį paklaidos išvestinėms (žr. vadovėlį). Teorema įrodyta. □

Palyginsime Galiorkino metodo sprendinio konvergavimo įverčius su analogiškais baigtinių skirtumų schemų konvergavimo įverčiais.

- Galiorkino metodo sprendinio paklaidą įvertinome $L_2(a, b)$ normoje, o baigtinių skirtumų metodo sprendinį – tik diskrečiojo tinklo ω_h taškuose.
- 2.3 teoremoje įrodytieji paklaidų įverčiai galioja, jei diferencialinio uždavinio sprendinio antrosios išvestinės L_2 norma yra aprėžta. Įvertindami baigtinių skirtumų metodo aproksimavimo paklaidą, reikalavome, kad diferencialinio uždavinio sprendinio ketvirtoji išvestinė būtų aprėžta (tirdami konvergavimą energetiniu metodu, parodėme, kad užtenka trečiosios išvestinės aprėžtumo).