2.2. Baigtinių skirtumų schemų konvergavimo analizė

Šiame poskyryje įrodysime, kad mūsų sudarytų baigtinių skirtumų schemų sprendiniai konverguoja į diferencialinio uždavinio sprendinį, ir įvertinsime tokio konvergavimo greitį. Kaip jau matėme, nagrinėdami pradinio uždavinio sprendimo algoritmus, baigtinių skirtumų metodo konvergavimo analizė remiasi *aproksimacijos* ir *stabilumo* sąvokomis. Tačiau kiekvienu atveju jas reikia tiksliai apibrėžti.

Panagrinėkime diferencialinę lygtį:

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1\,. \tag{2.19}$$

Suformuluosime dvi kraštinių sąlygų kombinacijas. Pirmuoju atveju abiejuose intervalo $[0,1]$ galuose imsime pirmojo tipo kraštines sąlygas:

$$u(0) = \mu_0, \quad u(1) = \mu_1\,. \tag{2.20}$$

Antruoju atveju taške $x = 0$ formuluosime trečiojo tipo kraštinę sąlygą:

$$-k(0)u'(0) + \beta u(0) = \mu_0, \quad u(1) = \mu_1\,. \tag{2.21}$$

Tarsime, kad kraštinio diferencialinio uždavinio koeficientai tenkina eliptiškumo sąlygas:

$$k(x) \geqslant k_0 > 0, \quad q(x) \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0\,.$$

Intervale $[0,1]$ apibrėžiame tolygųjį diskretųjį tinklą ω_h. Kraštinį uždavinį (2.19) – (2.20) aproksimuojame baigtinių skirtumų schema:

$$\begin{cases} -(a_{i-0,5}y_{\bar{x}})_x + d_i y_i = \varphi_i, & x_i \in \omega_h\,, \\ y_0 = \mu_0, \quad y_N = \mu_1\,. \end{cases} \tag{2.22}$$

Trečiojo tipo kraštinę sąlygą aproksimuosime dviem būdais: baigtinių tūrių metodu:

$$-a_{0,5}y_{x,0} + \big(\beta + \frac{h}{2}d_0\big)y_0 = \mu_0 + \frac{h}{2}\varphi_0\,, \tag{2.23}$$

ir paprasčiausiu baigtinių skirtumų artiniu

$$-a_{0,5}y_{x,0} + \beta y_0 = \mu_0\,. \tag{2.24}$$

2.2.1. Stabilumo apibrėžimas

Pažymėkime baigtinių skirtumų schemos sprendinio globaliąją paklaidą:

$$z_i = y_i - u(x_i).$$

Šį skirtumą įrašę į baigtinių skirtumų schemą, gausime, kad funkcija z tenkina baigtinių skirtumų lygtis

$$-(az_{\bar{x}})_x + d_i z_i = \psi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{2.25}$$

ir vieną iš trijų kraštinių sąlygų kombinacijų: pirmojo tipo kraštines sąlygas:

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0\,, \tag{2.26}$$

trečiojo ir pirmojo tipo sąlygas:

$$-a_{0,5} z_{x,0} + \big(\beta + \frac{h}{2} d_0\big) z_0 = \psi_0, \quad z_N = 0$$

arba paprastesnes trečiojo ir pirmojo tipo sąlygas:

$$-a_{0,5} z_{x,0} + \beta z_0 = \psi_0, \quad z_N = 0\,,$$

čia ψ_i yra baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaida taške x_i.

Tarsime, kad įvykdytos 2.3 lemos sąlygos, tada teisingi tokie įverčiai:

$$|\psi_i| \leqslant Ch^2, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1\,. \tag{2.27}$$

Kraštinės sąlygos (2.23) aproksimavimo paklaidos eilė irgi yra antroji:

$$|\psi_0| \leqslant Ch^2\,,$$

tačiau paprastenės kraštinės sąlygos (2.24) aproksimavimo paklaidos eilė yra tik pirmoji:

$$|\psi_0| \leqslant Ch\,.$$

Dabar pateiksime baigtinių skirtumų schemos stabilumo apibrėžimą.

Baigtinių skirtumų schema yra *stabilioji*, jei (2.25) uždavinio su atitinkamomis kraštinėmis sąlygomis sprendinys tenkina įvertį:

$$\|Z\|_1 \leqslant C\|\Psi\|_2\,, \tag{2.28}$$

čia $\|\cdot\|_1$ ir $\|\cdot\|_2$ yra dvi diskrečiųjų funkcijų normos, o Z ir Ψ atitinkamai globaliųjų paklaidų ir aproksimavimo paklaidų vektoriai.

Matome, kad įrodę stabilumo įvertį, iš karto gauname baigtinių skirtumų schemos sprendinio konvergavimo teoremą, be to, sprendinio tikslumo eilė sutampa su baigtinių skirtumų schemos aproksimacijos tikslumo eile.

Šioje analizėje svarbu tinkamai parinkti normas $\|\cdot\|_1$ ir $\|\cdot\|_2$. Bendra taisyklė yra tokia: norma $\|\cdot\|_1$ turi būti kuo stipresnė, tada daugiau informacijos gauname apie diferencialinio uždavinio sprendinį, o norma $\|\cdot\|_2$ turi būti kuo silpnesnė, tada platesnei diferencialinių uždavinių ir baigtinių skirtumų schemų aibei pavyksta įrodyti konvergavimą.

2.2.2. Baigtinių skirtumų schemos su pirmojo tipo kraštinėmis sąlygomis konvergavimo analizė

Panagrinėkime (2.22) baigtinių skirtumų schemą. Šios schemos sprendinio globalioji paklaida z tenkina (2.25) – (2.26) uždavinį. Baiginių skirtumų schemos stabilumo įvertį įrodysime remdamiesi maksimumo principu.

2.1 teorema. *Tarkime, kad diferencialinės lygties koeficientas $q(x)$ yra teigiamoji funkcija:*

$$q(x) \geqslant q_0 > 0\,,$$

tada baigtinių skirtumų schema (2.22) *yra stabilioji:*

$$\|Y - U\|_{C(\omega_h)} \leqslant C\, \|\Psi\|_{C(\omega_h)}\,,$$

ir galioja paklaidos įvertis:

$$\|Y - U\|_{C(\omega_h)} \leqslant Ch^2\,.$$

Įrodymas. Tarkime, kad (2.25) – (2.26) uždavinio sprendinio modulio didžiausioji reikšmė yra pasiekiama taške x_j. Šis taškas yra vidinis diskrečiojo tinklo taškas, nes kraštiniuose taškuose sprendinio paklaida yra lygi nuliui:

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0\,.$$

Iš (2.25) lygties gauname lygybę:

$$\Big(\frac{1}{h^2}\big(a_{j+0,5} + a_{j-0,5}\big) + d_j\Big) z_j = \frac{1}{h^2}\big(a_{j-0,5} z_{j-1} + a_{j+0,5} z_{j+1}\big) + \psi_j\,.$$

Visi lygties koeficientai yra teigiami, todėl galime taip įvertinti didžiausiosios sprendinio reikšmės modulį:

$$\Big(\frac{1}{h^2}\big(a_{j+0,5} + a_{j-0,5}\big) + d_j\Big) |z_j| \leqslant \frac{1}{h^2}\big(a_{j-0,5}|z_{j-1}| + a_{j+0,5}|z_{j+1}|\big) + |\psi_j|\,.$$

Nelygybę tik sustiprinsime, jei z_{j+1} ir z_{j-1} reikšmes pakeisime didesne $|z_j|$ reikšme:

$$\Big(\frac{1}{h^2}\big(a_{j+0,5}+a_{j-0,5}\big)+d_j\Big)|z_j| \leqslant \frac{1}{h^2}\big(a_{j-0,5}+a_{j+0,5}\big)|z_j|+|\psi_j|\,.$$

Kadangi $d_j \geqslant q_0$, tai iš šios nelygybės gauname stabilumo įvertį:

$$\|Z\|_{C(\omega_h)} \leqslant \frac{1}{q_0}|\psi_j| \leqslant \frac{1}{q_0}\|\Psi\|_{C(\omega_h)}\,.$$

Pasinaudoję aproksimavimo paklaidos įverčiu (2.27), įrodome globaliosios paklaidos konvergavimo greičio įvertį. □

2.2.3. Antrojo ir trečiojo tipo kraštinių sąlygų analizė

Trečiojo tipo kraštinė sąlyga. Baigtinių skirtumų schemų su trečiojo tipo kraštine sąlyga, t. y. kai $\beta > 0$, konvergavimas irgi įrodomas maksimumo principu. Kadangi šiuo atveju globaliosios paklaidos didžiausioji reikšmė gali būti pasiekta ir kraštiniame taške x_0, tai nagrinėjame diskrečiųjų taškų aibę:

$$\omega_h^+ = \big\{x_i: \;\; x_i = ih, \;\; i = 0, 1, \ldots, N-1\big\}\,.$$

Taikydami maksimumo principą, gauname baigtinių skirtumų schemos stabilumo įvertį:

$$\|Y-U\|_{C(\omega_h^+)} \leqslant C\|\Psi\|_{C(\omega_h^+)}\,.$$

Atsižvelgę į aproksimavimo paklaidos įverčius, įrodome, kad baigtinių skirtumų schemos (2.22) – (2.23) sprendinio paklaida tenkina nelygybę:

$$\|Y-U\|_{C(\omega_h^+)} \leqslant Ch^2\,,$$

o baigtinių skirtumų schemos (2.22), (2.24) sprendinio paklaida yra tokia:

$$\|Y-U\|_{C(\omega_h^+)} \leqslant Ch\,.$$

Antrojo tipo kraštinė sąlyga. Dabar panagrinėkime baigtinių skirtumų schemą (2.22), (2.23) su antrojo tipo kraštine sąlyga taške $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} -(a_{i-0,5}y_{\bar{x}})_x + d_i y_i = \varphi_i, \;\; x_i \in \omega_h\,, \\ -a_{0,5}y_{x,0} + \dfrac{h}{2}d_0 y_0 = \mu_0 + \dfrac{h}{2}\varphi_0, \;\; y_N = \mu_1\,. \end{array}\right.$$

Vėl nagrinėjame du atvejus. Jei didžiausiąją reikšmę paklaida pasiekia vidiniame tinklo taške, tai galioja įvertis:

$$\|Z\|_{C(\omega_h)} \leqslant \frac{1}{q_0}|\psi_j| \leqslant \frac{1}{q_0}\|\Psi\|_{C(\omega_h)}\,,$$

jei paklaidos maksimumas pasiekiamas kraštiniame taške $x = x_0$, tai:

$$\frac{h}{2}q_0|z_0| \leqslant \frac{h}{2}d_0|z_0| \leqslant |\psi_0|\,.$$

Iš čia gauname nelygybę:

$$|z_0| \leqslant \frac{2}{hq_0}|\psi_0|\,.$$

Todėl baigtinių skirtumų schemos su Neimano tipo kraštine sąlyga stabilumo įvertis yra toks:

$$\|Z\|_{C(\omega_h^+)} \leqslant \frac{1}{q_0}\max\left(\|\Psi\|_{C(\omega_h)},\ \frac{2}{h}|\psi_0|\right).$$

Kadangi visuose taškuose aproksimavimo paklaida yra $\mathcal{O}(h^2)$ eilės dydis, tai diskrečiojo sprendinio globaliajai paklaidai galioja įvertis:

$$\|Y - U\|_{C(\omega_h^+)} \leqslant Ch\,. \tag{2.29}$$

Kitame poskyryje įsitikinsime, kad maksimumo principu įrodytas (2.29) paklaidos įvertis yra nepakankamai tikslus, jis neparodo tikrosios baigtinių skirtumų schemos tikslumo eilės.

Šiame poskyryje gautuose stabilumo įverčiuose tiek sprendinio globalioji paklaida, tiek ir aproksimavimo paklaida yra įvertintos C normoje. Todėl jei nors viename diskrečiojo tinklo taške gaunamas blogesnis baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaidos įvertis, tai jis ir nulemia diskrečiojo sprendinio globaliosios paklaidos įvertį. Toks rezultatas ne visada yra optimalus – sukurta daug kitų stabilumo įvertinimo būdų, kuriais gaunami tikslesni įverčiai.

2.2.4. Energijos stabilumo įvertinimo metodas

Pirmiausia šį metodą paaiškinsime diferencialinio kraštinio uždavinio

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\big(k(x)\dfrac{du}{dx}\big) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l\,, \\ -k(0)u'(0) + \beta u = \mu_0, \quad u(l) = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

pavyzdžiu. Tarsime, kad uždavinio koeficientai tenkina eliptiškumo sąlygas:

$$k(x) \geqslant k_0 > 0, \quad q(x) \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0\,.$$

Funkcijų, apibrėžtų intervale $[0, l]$, aibėje apibrėžkime skaliarinę sandaugą ir normą:

$$(u, v) = \int_0^l u(x)v(x)\,dx, \quad \|u\|^2 = (u, u)\,.$$

Taip pat apibrėžkime funkcijos $u(x)$ maksimumo normą:

$$\|u\|_C = \max_{0 \leqslant x \leqslant l} |u(x)|.$$

(2.30) lygtį skaliariškai padauginkime iš funkcijos $u(x)$:

$$-\int_0^l (ku')'u(x)\,dx + (qu, u) = (f, u)\,.$$

Pirmąjį integralą integruokime dalimis, gausime lygtį:

$$\int_0^l k(x)(u')^2\,dx - k(x)u'u\Big|_0^l + (qu, u) = (f, u)\,.$$

Į šią lygtį įrašykime kraštines sąlygas:

$$k(0)u'(0) = \beta u(0) - \mu_1, \quad u(l) = 0\,,$$

gausime lygybę:

$$(k, (u')^2) + \beta u^2(0) + (qu, u) = (f, u) + \mu_1 u(0)\,,$$

vadinamą *energijos lygybe*. Pasinaudoję eliptiškumo sąlyga, turėsime įvertį:

$$k_0\Big\|\frac{du}{dx}\Big\|^2 \leqslant \Big(\ |\mu_1| + \int_0^l |f|\,dx\ \Big)\ \|u\|_C\,. \tag{2.31}$$

Toliau remsimės šia Sobolevo įdėties teorema:

2.2 teorema. *Jei funkcija $u(x)$ intervale $[0, l]$ yra tolydi, turi tolydžią pirmąją išvestinę ir $u(l) = 0$, tai:*

$$\|u\|_C \leqslant \sqrt{l} \left\| \frac{du}{dx} \right\| . \tag{2.32}$$

Įrodymas. Tarkime, kad didžiausią reikšmę funkcija $u(x)$ įgyja taške $x = c$:

$$\|u\|_C = |u(c)| .$$

Pasinaudoję sąlyga $u(l) = 0$, gauname lygybę:

$$u(c) = -\int\limits_c^l \frac{du}{dx}\, dx .$$

Pritaikę Koši ir Buniakovskio nelygybę, įvertiname $|u(c)|$:

$$\begin{aligned} |u(c)| &\leqslant \int\limits_c^l \left| \frac{du}{dx} \right| dx \\ &\leqslant \Big(\int\limits_0^l 1\, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_0^l (u')^2\, dx \Big)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Teorema įrodyta. □

Iš šios teoremos ir (2.31) nelygybės gauname stabilumo įvertį:

$$\|u\|_C \leqslant \frac{l}{k_0} \Big(\int\limits_0^l |f|\, dx + |\mu_1| \Big) .$$

Palyginkime šį rezultatą su tikslumo įverčiu, įrodytu taikant maksimumo principą. Energijos metodu gautas stabilumo įvertis yra efektyvesnis, kadangi uždavinio dešinioji pusė įvertinta L_1 normoje, kuri yra silpnesnė už C normą. Be to toks įvertis yra tinkamas ir uždaviniui su Neimano kraštine sąlyga.