1.5. Rungės ir Kuto metodo konvergavimo analizė

Šiame poskyryje įrodysime, kad galiojant pakankamai bendroms sąlygoms Rungės ir Kuto diskrečiojo sprendinio tikslumas sutampa su metodo aproksimacijos tikslumo eile. Diferencialinį uždavinį (1.1) aproksimuokime Rungės ir Kuto metodu

$$\begin{cases} \dfrac{Y^{n+1}-Y^n}{\tau_{n+1}} = \sum\limits_{i=1}^{m} \sigma_i K_i(Y)\,, \\ K_1(Y) = F(t_n, Y^n)\,, \\ K_i(Y) = F\Big(t_n + a_i\tau_{n+1}, Y^n + \tau_{n+1}\sum\limits_{j=1}^{i-1} b_{ij}K_j(Y)\Big), \quad i = 2,\dots,m\,. \end{cases}$$

Pažymėkime diskrečiojo sprendinio paklaidą $Z^n = Y^n - U^n$, čia U^n yra PDL pradinio uždavinio sprendinys. Remdamiesi bendrąja baigtinių skirtumų metodo konvergavimo analizės schema, išdėstyta 1.3 skirsnyje, tirsime uždavinį, kurį tenkina paklaidų funkcija:

$$\begin{cases} \dfrac{Z^{n+1}-Z^n}{\tau_{n+1}} - \sum\limits_{i=1}^{m} \sigma_i\big(K_i(Y) - K_i(U)\big) = -\Psi^n\,, \\ Z^0 = 0\,, \end{cases} \tag{1.42}$$

čia Ψ^n yra Rungės ir Kuto metodo aproksimavimo paklaida

$$\Psi^n = \frac{U^{n+1}-U^n}{\tau_{n+1}} - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i K_i(U)\,.$$

Spręsdami Rungės ir Kuto metodo koeficientų parinkimo uždavinį įrodėme, kad

$$\|\Psi^n\| \leqslant C_A\tau^p, \quad p = p(m)\,.$$

Aproksimacijos tikslumo eilės p reikšmės nurodytos 1.6 lentelėje. Norėdami pasinaudoti 1.3 teoremos rezultatu apie baigtinių skirtumų metodo konvergavimą, turime įrodyti, kad (1.42) uždavinio sprendinys tenkina stabilumo nelygybę

$$\|Z^{n+1}\| \leqslant (1 + C_1\tau_{n+1})\|Z^n\| + C_2\tau_{n+1}\|\Psi^n\|\,. \tag{1.43}$$

Vektoriaus normą apibrėžkime lygybe:

$$\|Z\| = \max_{1\leqslant i\leqslant M} |z_i|\,.$$

Tarkime, kad funkcija $F(t, U)$ tenkina Lipšico sąlygą

$$\|F(t, U_1) - F(t, U_2)\| \leqslant L\|U_1 - U_2\| \,.$$

Tolesnis analizės tikslas tikslas yra (1.42) lygtyje įvertinti narį

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \big(K_i(Y) - K_i(U) \big) \,.$$

Šį kartą gauname rekurentinį sąryšį tarp pagalbinių funkcijų $\big(K_i(Y) - K_i(U)\big)$, kurį įvertiname panaudodami diskrečiąją Gronvalo lemą.

Tada, naudodamiesi 1.3 teorema, įrodome Rungės ir Kuto metodo sprendinio konvergavimą.

1.4 teorema. *Jei funkcija $F(t, U)$ tenkina Lipšico sąlygą, o Ψ^n yra Rungės ir Kuto metodo aproksimavimo paklaida, tai diskrečiojo sprendinio globaliajai paklaidai galioja įvertis*

$$\|Y^n - U^n\| \leqslant t_n e^{Ct_{n-1}} \max_{0 \leqslant j \leqslant n-1} \|\Psi^j\| \,,$$

čia $C = \sigma L m (1 + L b \tau_0)^{m-1}, \;\; b = \max\limits_{i,j} |b_{ij}|$.

Kaip ir Eulerio metodo atveju galime padaryti išvadą, kad Rungės ir Kuto metodo sprendinio tikslumo eilė yra lygi aproksimavimo paklaidos eilei.