1 skyrius

PDL pradinio uždavinio skaitinio sprendimo metodai

1.1. Baigtinių skirtumų metodas

Spręskime pradinį paprastųjų diferencialinių lygčių uždavinį

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = F(t, U)\,, \\ U(0) = U_0\,. \end{cases} \tag{1.1}$$

Visada tarsime, kad vektoriaus funkcijos $F(t, U)$ reikšmės yra aprėžtos iš viršaus:

$$\big|f_i(t, U)\big| \le M_0, \quad i = 1, 2, \ldots, M\,.$$

Pirmiausia suformuluosime pagrindinius baigtinių skirtumų metodo etapus, kadangi jie yra svarbūs skaitiškai sprendžiant daugelį kitų uždavinių. Baigtinių skirtumų metodo pagrindinis tikslas yra aproksimuoti diferencialinį uždavinį netiesinių lygčių sistema.

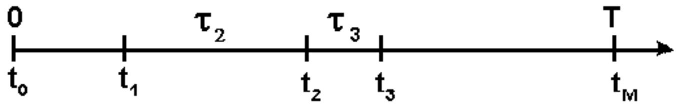
1.1.1. Apibrėžimo srities diskretizacija

Diferencialinės lygties (1.1) sprendinys yra ieškomas visame intervale $0 \le t \le T$. Įveskime *diskretųjį tinklą* pagal koordinatę t:

$$\omega_\tau = \big\{t_n: \ \ t_n = t_{n-1} + \tau_n,\ n = 1, \ldots, N,\ \ t_0 = 0,\ t_N = T\big\}\,,$$

čia $\tau_n > 0$ yra diskrečiojo tinklo žingsnis, t_n yra vadinamas diskrečiojo tinklo mazgu. Tinklo ω_τ pavyzdys pateiktas 1.1 pav. Jei visi τ_n yra pastovūs, tai turime *tolygųjį* diskretųjį tinklą:

$$\omega_\tau = \big\{ t_n : \quad t_n = n\tau, \ n = 0, 1, \dots, N, \ \ t_N = T \big\} .$$



1.1 pav. Diskretusis tinklas ω_τ

PDL pradinio uždavinio sprendinio artinį skaičiuosime tik diskrečiojo tinklo mazguose, šį artinį žymėsime

$$Y^n = Y(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, N .$$

Jei sprendžiame M-osios eilės PDL sistemą, tai Y^n yra vektorius:

$$Y^n = \big(y_1^n, y_2^n, \dots, y_M^n \big)^T .$$

Taigi gauname baigtinį skaičių nežinomųjų – jų iš viso yra $M \times \big(N+1\big)$. Vadinasi turėsime sudaryti tiek pat lygčių, iš kurių ir rasime skaitinį sprendinį.

Žinodami diferencialinio uždavinio sprendinio artinius diskrečiojo tinklo mazguose, nesunkiai galime apskaičiuoti reikšmes ir kituose intervalo taškuose. Šį uždavinį sprendžiame interpoliavimo metodu. Pavyzdžiui galime naudoti tiesinio interpoliavimo formulę

$$Y(t) = Y^{n-1} \frac{t_n - t}{\tau_n} + Y^n \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n}, \quad t_{n-1} \le t \le t_n,$$

kurios tikslumas $\mathcal{O}(\tau^2)$. Svarbu tik taip parinkti interpoliavimo formules, kad jų aproksimacijos tikslumas būtų ne mažesnis už apskaičiuoto artinio Y^n tikslumą diskrečiojo tinklo mazguose. Čia priminsime bendrąjį matematinio modeliavimo optimalumo principą, kuris rekomenduoja siekti, kad visuose etapuose atsirandančios paklaidos būtų tos pačios mažumo eilės dydžiai.

1.1.2. Išvestinių aproksimacija baigtiniais skirtumais

Tolydžiosios funkcijos išvestinę $v'(t)$ aproksimuosime baigtiniais skirtumais naudodami tik funkcijos reikšmes tinklo ω_τ mazguose. Aišku, kad toks pakeitimas gali būti atliktas daugeliu būdų. Nagrinėkime baigtinių skirtumų formulę

$$v_t = \frac{v(t_n+\tau) - v(t_n)}{\tau}, \quad \tau > 0\,. \tag{1.2}$$

Naudodami Teiloro skleidinį

$$v^{n+1} = v^n + \tau v'(t_n) + \frac{\tau^2}{2} v''(t_n + \Theta\tau)\,, \quad 0 < \Theta < 1\,,$$

gausime, kad

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = v'(t_n) + \frac{\tau}{2} v''(t_n + \Theta\tau)\,. \tag{1.3}$$

Išvestinės $v'(t_n)$ reikšmę galime aproksimuoti ir tokia baigtinių skirtumų formule

$$v_{\bar{t}} \equiv \frac{v^n - v^{n-1}}{\tau} = v'(t_n) - \frac{\tau}{2} v''(t_n - \Theta\tau)\,, \quad 0 < \Theta < 1\,. \tag{1.4}$$

Iš (1.3) ir (1.4) lygybių matyti, kad jei funkcija v yra pakankamai glodi (t.y. jos antroji išvestinė aprėžta, $|v''(t)| \le C$), tai baigtinių skirtumų formulės v_t ir $v_{\bar{t}}$ aproksimuoja išvestinės $v'(t_n)$ reikšmę $\mathcal{O}(\tau)$ tikslumu.

Galima sudaryti ir tikslesnes baigtinių skirtumų formules. Nagrinėkime *centrinių skirtumų* formulę

$$v_{\overset{\circ}{t}} = \frac{v^{n+1} - v^{n-1}}{2\tau}\,.$$

Vėl naudodami Teiloro skleidinį gausime

$$v_{\overset{\circ}{t}} = v'(t_n) + \frac{\tau^2}{6} v'''(t_n + \Theta\tau)\,, \quad |\Theta| < 1\,. \tag{1.5}$$

Taigi šios formulės tikslumas padidėja iki $\mathcal{O}(\tau^2)$, jei funkcijos trečioji išvestinė yra aprėžta $|v'''(t)| \le C$.

1 uždavinys Įvertinkite $v_{\overset{\circ}{t}}$ tikslumą, kai tik antroji funkcijos v išvestinė yra aprėžta, t.y. $|v''(t)| \le C$.

Ta pati baigtinių skirtumų formulė gali skirtingu tikslumu aproksimuoti funkcijos išvestinės reikšmę skirtinguose taškuose. Pavyzdžiui, v_t yra tikslesnis išvestinės $v'(t)$ artinys taške $\bar{t} = t_n + \frac{1}{2}\tau$ (žr. (1.5) lygybę):

$$v_t = v'(\bar{t}) + \frac{\tau^2}{24} v'''(\bar{t} + \Theta\tau)\,, \quad |\Theta| < \frac{1}{2}\,.$$

Šią savybę panaudosime sudarydami skaitinius diferencialinių lygčių sprendimo algoritmus.

1.1.3. Baigtinių skirtumų uždavinys

Diferencialinėje lygtyje (1.1) pakeiskime išvestinę baigtinių skirtumų formule (1.2), tada taške $t = t_n$ gausime baigtinių skirtumų lygtį

$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{\tau_{n+1}} = F(t_n, Y^n)\,. \tag{1.6}$$

Kai sprendžiame diferencialinių lygčių sistemą, tai (1.6) yra baigtinių skirtumų lygčių sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y_1^{n+1} - y_1^n}{\tau_{n+1}} = f_1(t_n, Y^n), \\ \dfrac{y_2^n - y_2^n}{\tau_{n+1}} = f_2(t_n, Y^n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{y_M^{n+1} - y_2^n}{\tau_{n+1}} = f_M(t_n, Y^n). \end{cases}$$

Prie (1.6) lygčių sistemos prijungiame pradinę sąlygą

$$Y^0 = U_0\,. \tag{1.7}$$

Baigtinių skirtumų lygtys (1.6), $n = 0, 1, \dots, N-1$ ir pradinė sąlyga (1.7) sudaro *baigtinių skirtumų pradinį uždavinį.*

Šis PDL sistemos pradinio uždavinio sprendimo metodas vadinamas *išreikštiniu Eulerio metodu.*

Pateiksime kitą išreikštinio Eulerio metodo konstravimo būdą, kuri naudosime ir kitų svarbių algoritmų sudarymui. Suintegravę intervale $[t_n, t_{n+1}]$ (1.1) lygtį, gausime lygybę

$$U^{n+1} = U^n + \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{dU}{dt} dt = U^n + \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, U) dt\,. \tag{1.8}$$

Integralą aproksimuokime kairiųjų stačiakampių formule. Gauname lygtį

$$Y^{n+1} = Y^n + \tau_{n+1} F(t_n, Y^n)\,, \tag{1.9}$$

sutampančią su (1.6) lygtimi.

Išreikštinį Eulerio metodą realizuoti labai paprasta, nes sprendinio reikšmės apskaičiuojamos pagal išreikštinę formulę (1.9). Informaciją užtenka saugoti tik dviejuose gretimuose laiko sluoksniuose.

Pateiksime išreikštinio Eulerio metodo algoritmą.

procedure Išreikštinis Eulerio metodas
begin

1. Pradinės sąlygos skaičiavimas
   $t = 0, \quad n = 0$
   for $i = 1$ **to** M
   $\quad YN[i] = u_0[i]$
   end for

2. Sprendinio skaičiavimas nauju laiku t_{n+1}
   while $\big((t + \tau_{n+1}) \leq T\big)$
   $\quad$ **for** $i = 1$ **to** M
   $\quad\quad YS[i] = YN[i]$
   $\quad$ **end for**
   $\quad$ **for** $i = 1$ **to** M
   $\quad\quad YN[i] = YS[i] + \tau_{n+1} \, f_i(t, YS)$
   $\quad$ **end for**
   $\quad t = t + \tau_{n+1}$
   $\quad n = n + 1$
   end while

end

Nagrinėkime vieno skaitinio eksperimento rezultatus (uždavinio formulavimas aprašytas vadovėlyje). 1.1 lentelėje pateiktos diskrečiojo sprendinio Y^n, diferencialinio uždavinio tikslaus sprendinio U^n ir paklaidos $E^n = |Y^n - U^n|$ reikšmės, kai $\tau = 2$ ir $\tau = 1$.

1.1 lentelė. PDL uždavinio sprendimas išreikštiniu Eulerio metodu

τ	t_n	U^n	Y^n	E^n
2	0,0	1,0000	1,0000	0,0000
2	2,0	0,9851	0,9846	0,0005
2	4,0	0,9710	0,9702	0,0008
2	6,0	0,9578	0,9566	0,0012
1	0,0	1,0000	1,0000	0,0000
1	1,0	0,9924	0,9923	0,0001
1	2,0	0,9851	0,9849	0,0002
1	3,0	0,9780	0,9776	0,0003
1	4,0	0,9710	0,9706	0,0004
1	5,0	0,9643	0,9638	0,0005
1	6,0	0,9578	0,9572	0,0006

Lygindami paklaidos E^n reikšmes taške $t = 6$, kai $\tau = 2$ ir $\tau = 1$ matome, kad paklaida sumažėjo du kartus. Todėl mažindami diskretųjį žingsnį τ galime tikėtis gauti vis tikslesnį diskretųjį sprendinį. Tai patvirtina skaitinio eksperimento rezultatai, pateikti 1.2 lentelėje.

1.2 lentelė. Išreikštinio Eulerio metodo tikslumo analizė

τ	$E(\tau)$	$E(2\tau)/E(\tau)$
1,000	0,580E-3	2,0446
0,500	0,278E-3	2,0217
0,250	0,143E-3	2,0107
0,125	0,712E-4	2,0053