2 skyrius

PDL kraštinio uždavinio skaitinio sprendimo metodai

2.1. Baigtinių skirtumų metodas

Šiame poskyryje spręsime antrosios eilės PDL kraštinį uždavinį:

$$\begin{cases} -u'' + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l\,, \\ u(0) = \mu_0, \quad u(l) = \mu_1\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

Tarsime, kad (2.1) lygties koeficientas $q(x)$ tenkina eliptiškumo sąlygą

$$q(x) \geqslant 0\,.$$

Tada diferencialinis kraštinis uždavinys turi vienintelį sprendinį.

2.1.1. Baigtinių skirtumų schema

Uždavinį spręsime baigtinių skirtumų metodu. Intervale $[0, l]$ apibrėžiame tolygųjį diskretųjį tinklą:

$$\omega_h = \{x_i : x_i = ih,\ i = 1, 2, \cdots, N-1\}, \quad Nh = l\,.$$

Diferencialinio kraštinio uždavinio sprendinio artinį tinklo ω_h mazguose žymėsime:

$$y_i = y(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N\,.$$

Žinodami diskrečiojo sprendinio reikšmes tinklo taškuose ir taikydami interpoliavimo formules, galime apskaičiuoti sprendinio reikšmes visame intervale $[0, l]$.

(2.1) lygtyje išvestinę u'' pakeičiame jos skirtuminiu artiniu:

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q_i y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \, .$$

Apibrėžkime tokias skirtumų funkcijas:

$$y_{\bar{x}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad y_x = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \, .$$

Tada baigtinių skirtumų lygtį galime užrašyti ir trumpiau:

$$-y_{\bar{x}x} + q_i y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \, . \tag{2.2}$$

Prie šios tiesinių lygčių sistemos pridedame kraštines sąlygas:

$$y_0 = \mu_0, \quad y_N = \mu_1 \, . \tag{2.3}$$

(2.2) – (2.3) uždavinys vadinamas *baigtinių skirtumų schema*, aproksimuojančia PDL kraštinį uždavinį.

Baigtinių skirtumų schemos sprendinio radimas

Gautąją baigtinių skirtumų schemą užrašykime kaip tiesinių lygčių sistemą su triįstrižaine matrica:

$$\begin{cases} C_1 y_1 - B_1 y_2 = F_1 + A_1 \mu_0 \, , \\ -A_i y_{i-1} + C_i y_i - B_i y_{i+1} = F_i, \; i = 2, \cdots, N-2 \, , \\ -A_{N-1} y_{N-2} + C_{N-1} y_{N-1} = F_{N-1} + B_{N-1} \mu_1 \, . \end{cases} \tag{2.4}$$

Matricos koeficientai yra apskaičiuojami pagal šias formules:

$$A_i = \frac{1}{h^2}, \quad B_i = \frac{1}{h^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \, ,$$
$$C_i = \frac{2}{h^2} + q(x), \quad F_i = f(x_i) \, .$$

Tiesinių lygčių sistemos su triįstrižaine matrica yra taupiai sprendžiamos *perkelties metodu*. Užrašykime sistemos sprendinį taip:

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i \, , \quad i = 1, 2, \cdots, N-2 \, . \tag{2.5}$$

Iš (2.4) sistemos pirmosios lygties randame, kad

$$\alpha_1 = \frac{B_1}{C_1}, \quad \beta_1 = \frac{F_1}{C_1} \, . \tag{2.6}$$

Į tiesinių lygčių sistemos i-ąją lygtį įrašę rekurenčiąją formulę

$$y_{i-1} = \alpha_{i-1} y_i + \beta_{i-1}\,,$$

apskaičiuojame perkelties koeficientus:

$$\alpha_i = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_{i-1}}\,, \quad \beta_i = \frac{F_i + A_i\beta_{i-1}}{C_i - A_i\alpha_{i-1}}\,.$$

Žinodami α_1 ir β_1, nuosekliai apskaičiuojame koeficientus

$$\alpha_i, \ \ \beta_i, \quad i = 2, 3, \ldots, N-2\,.$$

Tai ir yra perkelties metodo *tiesioginės eigos* etapas.

Tada į tiesinės lygčių sistemos paskutinią lygtį įrašę formulę:

$$y_{N-2} = \alpha_{N-2} y_{N-1} + \beta_{N-2}\,,$$

randame sprendinį:

$$y_{N-1} = \frac{F_{N-1} + B_{N-1}\mu_1 + A_{N-1}\beta_{N-2}}{C_{N-1} - A_{N-1}\alpha_{N-2}}\,.$$

Likusias sprendinio reikšmes $y_j, \ j = N-2, \ldots, 1$ nuosekliai apskaičiuojame pagal (2.5) rekurenčiąją formulę. Tai ir yra perkelties metodo *atbulinės eigos* etapas.

Nurodysime pakankamas sąlygas, garantuojančias, kad (2.4) tiesinių lygčių sistema turi vienintelį sprendinį, kurį galime apskaičiuoti perkelties metodu. Be to, tada skaičiavimo algoritmas yra stabilus apvalinimo paklaidų atžvilgiu.

2.1 lema. *Tarkime, kad tiesinių lygčių sistemos matrica yra diagonaliai vyraujanti:*

$$|C_i| \geqslant |A_i| + |B_i|, \quad i = 1, \ldots, N-1 \tag{2.7}$$

ir bent vienoje lygtyje teisinga nelygybė

$$|C_j| > |A_j| + |B_j|. \tag{2.8}$$

Tada baigtinių skirtumų schema (2.2) – (2.3) turi vienintelį sprendinį. Jį galime apskaičiuoti perkelties metodu ir visi koeficientai α_i tenkina nelygybę:

$$|\alpha_i| \leqslant 1\,, \quad i = 1, \ldots, N-1\,. \tag{2.9}$$

Įrodymas. Matematinės indukcijos metodu įrodysime, kad perkelties koeficientai tenkina (2.9) nelygybę. Pastebėsime, kad (2.4) tiesinių lygčių sistemoje visi koeficientai A_i ir B_i yra teigiami ir išpildyta diagonalinio vyravimo sąlyga:

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad C_i \geqslant A_i + B_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

o pirmosios ir paskutinės lygčių koeficientai tenkina ir griežtą koeficientų vyravimo sąlygą

$$C_1 > B_1, \quad C_{N-1} > A_{N-1}.$$

Iš (2.6) formulės ir koeficientų diagonalinio vyravimo nelygybės gauname, kad

$$|\alpha_1| \leq 1\,.$$

Tarkime, kad jau įrodėme (2.9) nelygybę, kai $i \leq k, \quad 1 \leq k < N-1$. Tada teisingas įvertinimas:

$$|C_{i+1} - A_{i+1}\alpha_i| \geqslant |C_{i+1}| - |\alpha_i||A_{i+1}| \geqslant |B_{i+1}| > 0\,,$$

todėl galime realizuoti $(i+1)$-ojo žingsnio tiesioginės eigos etapą ir apskaičiuoti koeficientus $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$. Be to, įvertiname α_{i+1}:

$$|\alpha_{i+1}| = \frac{|B_{i+1}|}{|C_{i+1} - A_{i+1}\alpha_i|} \leqslant 1\,.$$

Lemos įrodymas baigtas. □

2.1.2. Baigtinių tūrių metodas

Šiame poskyryje susipažinsime su dar vienu baigtinių skirtumų schemų sudarymo metodu. Panagrinėkime diferencialinį kraštinį uždavinį:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\big(k(x)\dfrac{du}{dx}\big) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l\,, \\ -k(0)u'(0) + \beta u(0) = \mu_0\,, \\ u(l) = \mu_1\,. \end{cases} \tag{2.10}$$

Tarsime, kad diferencialinio uždavinio koeficientai tenkina eliptiškumo sąlygą:

$$k(x) \geqslant k_0 > 0, \quad q(x) \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0\,.$$

Intervale $[0, l]$ apibrėžkime diskretųjį tinklą:

$$\overline{\omega}_h = \big\{\; x_i : \quad x_i = ih, \; i = 0, 1, \dots, N, \; x_N = l \;\big\}\,.$$

Diferencialinę lygtį aproksimuokime diskrečiąja lygtimi. Taikysime *baigtinių tūrių* metodą (angl. *finite volume method*). Panagrinėkime elementariąją sritį:

$$V_i = \left\{ \ x : \quad x_{i-0,5} \leqslant x \leqslant x_{i+0,5} \ \right\}.$$

Srityje V_i diferencialinio uždavinio sprendinys tenkina tvermės dėsnį, kurį gauname integruodami (2.10) lygtį šiame intervale:

$$w_{i+0,5} - w_{i-0,5} + \int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)u(x)\,dx = \int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x)\,dx\,, \tag{2.11}$$

čia $w(x)$ pažymėjome srautą:

$$w(x) = -k(x)\frac{du}{dx}\,.$$

Norėdami gauti skaičiavimams tinkamą algoritmą, aproksimuokime pirmąjį integralą pagal vidurinių reikšmių formulę:

$$\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)u(x)\,dx \approx u_i \int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)\,dx\,.$$

Pažymėkime

$$d_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)\,dx, \quad \varphi_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x)\,dx\,.$$

Dabar parodysime, kaip aproksimuojame srautus. Tam galime naudoti baigtinių skirtumų metodą:

$$w_{i+0,5} \approx k_{i+0,5}\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\,.$$

Pateiksime ir kitą, aproksimavimo būdą, kurį gauname naudodami tvermės dėsnio aproksimavimo modifikaciją. Iš srauto lygybės $w(x) = -k(x)\dfrac{du}{dx}$ išreiškiame sprendinio išvestinę:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{w(x)}{k(x)}\,.$$

Integruodami šią lygybę intervale $[x_i, x_{i+1}]$ ir aproksimuodami funkciją $w(x)$ pirmuoju Teiloro skleidinio nariu $w(x) \approx w_{i+0,5}$, gauname formulę:

$$u_{i+1} - u_i = -\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} w(x)\frac{dx}{k(x)} \approx -w_{i+0,5}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)}\,.$$

Todėl srautą $w_{i+0,5}$ pakeičiame artiniu:

$$w_{i+0,5} \approx -a_{i+0,5}\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\,,$$

čia pažymėjome

$$a_{i+0,5} = \left(\frac{1}{h}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)}\right)^{-1}.$$

Priminsime, kad koeficientą $a_{i+0,5}$ galima skaičiuoti ir taip:

$$a_{i+0,5} = k(x_{i+0,5}).$$

Abi išraiškos yra tokio pačio tikslumo, kai difuzijos koeficientas $k(x)$ tolydus.

Šias išraiškas įrašę į (2.11) lygybę, gausime skirtumų lygtį:

$$-\frac{a_{i+0,5}y_x - a_{i-0,5}y_{\bar{x}}}{h} + d_i y_i = \varphi_i\,,$$

kurią trumpiau galime užrašyti ir taip:

$$-(a_{i-0,5}y_{\bar{x}})_x + d_i y_i = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1\,. \tag{2.12}$$

Kraštinių sąlygų aproksimavimas

Kadangi kraštinį diferencialinį uždavinį sudaro ne tik diferencialinė lygtis, bet ir dvi kraštinės sąlygos, tai svarbu ir pastarąsias aproksimuoti tokiu pačiu tikslumu kaip ir lygtį.

Pirmojo tipo kraštinę sąlygą pakeičiame tiksliąja lygybe:

$$y_N = \mu_1\,. \tag{2.13}$$

Trečiojo tipo kraštinę sąlygą galime pakeisti paprastu diskrečiuoju artiniu:

$$-a_{0,5}y_{x,0} + \beta y_0 = \mu_0\,,$$

tačiau vėliau parodysime, kad šios formulės aproksimacijos tikslumas yra mažesnis už (2.12) lygties aproksimacijos tikslumą. Vėl taikykime baigtinių tūrių metodą. Imkime sritį $V_0 = [0, x_{0,5}]$ ir integruokime šiame intervale (2.10) lygtį:

$$w_{0,5} - w_0 + \int_0^{x_{0,5}} q(x)u(x)\,dx = \int_0^{x_{0,5}} f(x)\,dx\,.$$

Srautą w_0 randame iš kraštinės sąlygos:

$$w_0 = -\beta u_0 + \mu_0\,.$$

Srautą $w_{0,5}$ ir pirmąjį integralą pakeiskime jų artiniais:

$$w_{0,5} \approx -a_{0,5}\frac{u_1 - u_0}{h}\,, \qquad \int_0^{x_{0,5}} q(x)u(x)\,dx \approx u_0 \int_0^{x_{0,5}} q(x)\,dx\,.$$

Šias išraiškas įrašę į balanso lygtį, gausime kraštinės sąlygos artinį:

$$-a_{0,5}y_{x,0} + (\beta + 0,5hd_0)y_0 = \mu_1 + \frac{1}{2}h\varphi_0\,, \tag{2.14}$$

čia pažymėjome:

$$d_0 = \frac{1}{0,5h}\int_0^{x_{0,5}} q(x)\,dx, \quad \varphi_0 = \frac{1}{0,5h}\int_0^{x_{0,5}} f(x)\,dx\,.$$

Baigtinių skirtumų schemą (2.12) – (2.14) vėl galime užrašyti kaip tiesinių lygčių sistemą su triįstrižaine matrica, be to, yra įvykdyta matricos diagonalinio vyravimo sąlyga. Todėl egzistuoja vienintelis baigtinių skirtumų schemos sprendinys.

2.1.3. Aproksimacijos tikslumo analizė

Ištirsime baigtinių skirtumų schemos (2.12) – (2.14) aproksimacijos tikslumą. Nurodysime pakankamas sąlygas, kada baigtinių skirtumų lygčių aproksimacijos tikslumo eilė yra antroji.

2.2 lema. *Jei baigtinių skirtumų lygčių koeficientams galioja lygybės:*

$$\frac{a_{i+0,5} - a_{i-0,5}}{h} = k'_i + \mathcal{O}(h^2), \quad \frac{a_{i+0,5} + a_{i-0,5}}{2} = k_i + \mathcal{O}(h^2)\,, \tag{2.15}$$

$$\varphi_i = f(x_i) + \mathcal{O}(h^2)\,, \quad d_i = q(x_i) + \mathcal{O}(h^2)\,, \tag{2.16}$$

tai jų aproksimacijos tikslumo eilė yra antroji.

Įrodymas. Tarkime, kad $u(x)$ yra glodžioji funkcija, kurios ketvirtoji išvestinė yra aprėžta, t. y. $|u^{(4)}(x)| \leqslant C_4$. Panagrinėkime skirtumų formulių u_x ir $u_{\bar{x}}$ Teiloro skleidinius:

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h} = \frac{u_i - \left(u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' - \frac{h^3}{6}u_i''' + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\tilde{t})\right)}{h}$$
$$= u_i' - \frac{h}{2}u_i'' + \frac{h^2}{6}u_i''' + \mathcal{O}(h^3)\,,$$
$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} = u_i' + \frac{h}{2}u_i'' + \frac{h^2}{6}u_i''' + \mathcal{O}(h^3)\,.$$

Iš šių įverčių ir lemos sąlygų (2.15) turime, kad:

$$(a_{i-0,5}u_{\bar{x}})_x \equiv \frac{a_{i+0,5}u_x - a_{i-0,5}u_{\bar{x}}}{h}$$
$$= \frac{a_{i+0,5} - a_{i-0,5}}{h}\left(u_i' + \frac{h^2}{6}u_i'''\right) + \frac{a_{i+0,5} + a_{i-0,5}}{2}u_i'' + \mathcal{O}(h^2)$$
$$= k_i'u_i' + k_iu_i'' + \mathcal{O}(h^2) \equiv (ku')' + \mathcal{O}(h^2)\,.$$

Tada gauname tokią baigtinių skirtumų lygties aproksimavimo paklaidos išraišką:

$$\psi_i = -(ku')' + q_iu_i - f_i + (d_i - q_i)u_i + (\varphi_i - f_i) + \mathcal{O}(h^2)\,.$$

Pasinaudoję (2.10) diferencialine lygtimi ir lemos sąlygomis (2.16), įrodome, kad

$$|\psi_i| \leqslant Ch^2\,.$$

Lema yra įrodyta. $\square$

2.3 lema. *Tarkime, kad funkcijos $g(x)$, $f(x)$ ir jų pirmosios išvestinės yra tolydžiosios, o jų antrosios išvestinės yra aprėžtosios funkcijos:*

$$|q''(x)| \leqslant C_2, \quad |f''(x)| \leqslant C_2, \quad 0 \leqslant x \leqslant l\,, \tag{2.17}$$

funkcija $k(x)$ ir jos pirmoji ir antroji išvestinės yra tolydžiosios, o trečioji išvestinė – aprėžtoji funkcija:

$$|k'''(x)| \leqslant C_3, \quad 0 \leqslant x \leqslant l\,. \tag{2.18}$$

Tada baigtinių skirtumų schemos (2.12) – (2.14) *aproksimacijos tikslumo eilė yra antroji.*

Įrodymas. Įvertinkime baigtinių skirtumų lygties (2.12) aproksimacijos tikslumą. Parodysime, kad įvykdytos visos 2.2 lemos sąlygos. Išskleiskime funkciją $q(x)$ Teiloro eilute taško $x = x_i$ atžvilgiu:

$$q(x) = q_i + q_i'(x - x_i) + q''(x_i + \theta h)\frac{(x - x_i)^2}{2}\,.$$

Suintegravę šią lygybę intervale $[x_{i-0,5}, x_{i+0,5}]$, gausime įvertį:

$$\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)\ dx = hq_i + \frac{1}{2}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q''(x_i + \theta h)(x - x_i)^2\,dx\,.$$

Pasinaudoję lemos sąlyga (2.17), įrodome, kad:

$$|d_i - q_i| \leqslant C_2\,\frac{h^2}{24}\,,$$

t. y. įvykdyta 2.2 lemos sąlyga (2.16). Analogiškai įrodome, kad teisingas įvertis:

$$|\varphi_i - f_i| \leqslant C_2\,\frac{h^2}{24}\,.$$

Išskleidę funkciją $\dfrac{1}{k(x)}$ Teiloro eilute ir pasinaudoję (2.18) įverčiu, gauname lygybes:

$$a_{i+0,5} = k_i + \frac{k_i'}{2}h + \frac{k_i''k_i - (k_i')^2}{12k_i}h^2 + \mathcal{O}(h^3)\,,$$

$$a_{i-0,5} = k_i - \frac{k_i'}{2}h + \frac{k_i''k_i - (k_i')^2}{12k_i}h^2 + \mathcal{O}(h^3)\,.$$

Tada įrodome, kad yra įvykdytos ir 2.2 lemos (2.15) sąlygos:

$$\frac{a_{i+0,5} + a_{i-0,5}}{2} = k_i + \mathcal{O}(h^2)\,, \quad \frac{a_{i+0,5} - a_{i-0,5}}{h} = k_i' + \mathcal{O}(h^2)\,.$$

Lieka ištirti kraštinės sąlygos (2.14) aproksimacijos tikslumą. Tarkime, kad diferencialinė lygtis (2.10) yra teisinga ir taške $x = 0$. Pagal apibrėžimą kraštinės sąlygos aproksimavimo paklaida yra:

$$\psi_0 = -a_{0,5}u_{x,0} + (\beta + 0,5hd_0)u_0 - \mu_0 - \frac{1}{2}h\varphi_0\,.$$

Į šią lygybę įrašykime Teiloro skleidinius:

$$a_{0,5} = k_0 + \frac{k_0'}{2}h + \mathcal{O}(h^2)\,, \quad \frac{u_1 - u_0}{h} = u_0' + \frac{u_0''}{2}h + \mathcal{O}(h^2)\,,$$
$$d_0 = q_0 + \mathcal{O}(h), \quad \varphi_0 = f_0 + \mathcal{O}(h)\,,$$

tada gausime tokią kraštinės sąlygos aproksimavimo paklaidos išraišką:

$$\psi_0 = \big(- k(0)u'(0) + \beta u(0) - \mu_0\big) + \frac{h}{2}\big(- k_0'u_0' - k_0u_0'' + q_0u_0 - f_0\big) + \mathcal{O}(h^2)\,.$$

Reiškinys, esantis pirmuosiuose skliaustuose, lygus nuliui dėl kraštinės sąlygos, reiškinys, esantis antruosiuose skliaustuose, irgi lygus nuliui. Tai išplaukia iš (2.10) diferencialinės lygties, todėl ir kraštinės sąlygos aproksimacijos tikslumo eilė yra antroji. Lema yra įrodyta. □

Iš lemos įrodymo išeina, jog paprasčiausio kraštinės sąlygos artinio

$$-a_{0,5}y_{x,0} + \beta y_0 = \mu_0$$

aproksimacijos tikslumo eilė yra tik pirmoji.