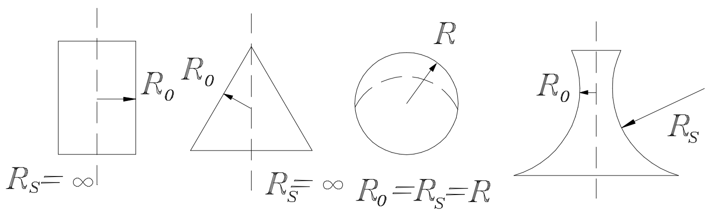
9. KEVALŲ ELEMENTAI

Kevalai

Tai – ploni storio kryptimi kūnai, sudaryti iš kreivų plokštumų. Geometrija nusakoma viduriniu paviršiumi ir storiu *t*. Kiekvienam paviršiaus taške galima rasti dvi kreives, atitinkančias minimalius ir maksimalius paviršiaus kreivius. Šios kreivės tarpusavyje statmenos; jos nusako paviršiaus vyriausiųjų kreivių spindulius.

Pavyzdžiai:



Įtempimai: kartu veikia membraniniai ir lenkimo įtempimai. Lenkimo įtempimai (įrąžos) – kaip lenkiamose plokštelėse. Membraninės įrąžos ilgio vienetui:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \ldots\sigma_y\ldots, \quad N_{xy} = \ldots\sigma_{xy}\ldots,$$

čia $z \perp$ paviršiui nagrinėjamam taške. Įtempimai bet kuriame kevalo taške šalia vidurinio paviršiaus:

$$\sigma_x = \sigma_{mx} + \sigma_{bx} = \frac{N_x}{t} + \frac{M_x z}{t^3/12},$$

…

Kevaluose vyrauja membraniniai įtempimai, todėl tokios struktūros gali „priimti“ dideles jėgas. Lenkimo poveikių, nors ir nežymių, išvengti neįmanoma vien jau dėl geometrijos.

Kevalų teorijos: labai skaitlingos; visų jų lygtys praktiškai neišsprendžiamos. Klasikinės teorijos (Flügge, Donnello, Sanderso, Vlasovo) galioja mažiems įlinkiams, ploniems kevalams (ignoruojant skersinę šlytį).

Elementų apžvalga

Patys sudėtingiausi b.e. Galima išskirti 3 b.e. grupes:

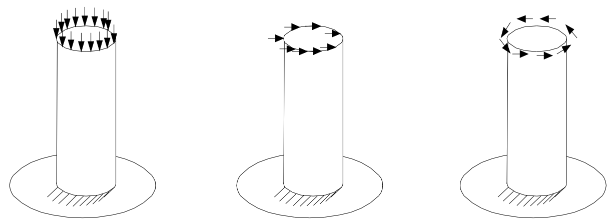
1. Plokštieji kevalų elementai - sudaryti iš membraninių ir lenkiamų plokštelių elementų. Patikimi, tenkina “patch” testus. Bet: reikia tankaus tinklelio.

2. Kreivieji elementai, išvesti pagal vieną ar kitą kevalų teoriją. Sudėtingi, reikia papildomos informacijos paviršiaus nusakymui. Kai kurie į laisvumo laipsnius įtraukia *w’’* – reikalauja per griežtų suderinamumo sąlygų.

3. Mindlino, arba „degeneruoti“ elementai. Vidurkis 1 ir 2 tipo elementų. Būdingas “užsikirtimo” reiškinys ploniems kevalams.

Visiems elementams būdinga: $K_m >> K_b$, todėl galimi skaitinio pobūdžio keblumai. Nėra aiškių standartinių (“reference”) elementų.

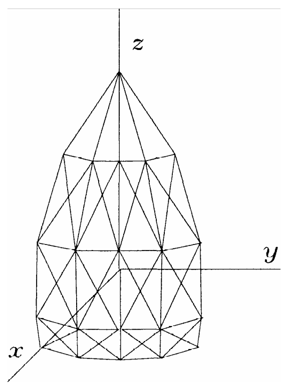
Būtini testai: plokščiam kūnui – membraninio įtempimų būvio tikrinimui, lenkimo atvejo tikrinimui; kartu ir “patch” testai. Cilindriniam kevalui – yra teoriniai sprendiniai membraninei, lenkimo ir sukimo apkrovoms:



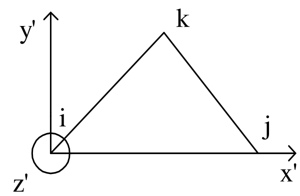
9.1. KEVALŲ MODELIAVIMAS PLOKŠČIAISIAIS ELEMENTAIS.

Bet kokio paviršiaus modeliavimui tinkami tik **trikampiai elementai**, todėl tik juos ir nagrinėsim.

Elemento standumo matrica lokalinėse koordinatėse



– globalinės koordinatės



|
lokalinės koordinatės

Membraninio elemento deformacija apibrėžiama:

$$\left[K^m\right]\left\{u_m{}^m\right\}=\left\{F^m\right\} \tag{9.1}$$

$$\left\{u_m{}^m\right\}=\begin{Bmatrix} u_i \\ v_{xi} \\ \\ . \\ . \\ . \end{Bmatrix} \qquad \left\{F^m\right\}=\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ \\ . \\ . \\ . \end{Bmatrix}$$

Lenkiamo elemento:

$$\left[K^b\right]\left\{u_m{}^b\right\}=\left\{F^b\right\}$$

$$\left\{u_m{}^b\right\}=\begin{Bmatrix} w_i \\ Q_{xi} \\ Q_{yi} \\ . \\ . \\ . \end{Bmatrix} \qquad \left\{F^b\right\}=\begin{Bmatrix} w_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ . \\ . \\ . \end{Bmatrix} \tag{9.2}$$

Jei poslinkiai (arba deformacijos) maži, tai membraninės ir lenkimo deformacijos praktiškai nesusietos – nepriklausomos vienos nuo kitų, todėl galima abiejų elementų superpozicija.

Iš (1) ir (2): į mazginių l.l. tarpą neįeina Q_z; jį tačiau turime įtraukti į $\{u_m\}$ norėdami nagrinėti poslinkius 3D erdvėje. Faktas, kad Q_z nefigūruoja energijos funkcionaluose, įvertinamas nuliniais eilute ir stulpeliu lokalinėje [K], bei nuliniu komponentu.

Taigi, lokaliniai

$$\{u_{mi}\} = \begin{Bmatrix} \{u^m{}_{mi}\} \\ \{u^b{}_{mi}\} \\ Q_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ Q_{xi} \\ Q_{yi} \\ Q_{zi} \end{Bmatrix}, \qquad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ir

$$[K]^e \{u_m\}^e = \{F\}^e,$$

$$\left[K_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\left[K_{ij}{}^m\right]$}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \multicolumn{3}{c}{} & 0 \\ 0 & 0 & \multicolumn{3}{c}{\left[K_{ij}{}^b\right]} & 0 \\ 0 & 0 & \multicolumn{3}{c}{} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Elemento charakteristikos globalinėse koordinatėse

Mazgų koordinatės įvedamos globalinėse ašyse: *x*, *y*, *z*.
Pereinama į lokalines koordinates *x'*, *y'*, *z'*, kur *x'y'* yra elemento plokštuma. Šiose koordinatėse formuojama [*K'*], {*F'*}.
[*K'*], {*F'*} transformuojamos į koordinates *x*, *y*, *z*.

Koordinačių transformavimo priklausomybės išvestos 1-ame skyriuje:

$$\{u'_m\} = [L]\{u_m\} \tag{9.3}$$

$$\{F'_m\} = [L]\{F_m\}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{bmatrix},$$

$[\lambda]$ - krypties kosinusų matrica. [*L*] sandara iš dviejų $[\lambda]$ reiškia, kad linijiniai poslinkiai ir posūkiai transformuojami identiškai.

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{''y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix}, \qquad \lambda_{x'x} - \cos(x', x), \ldots$$

Visam elementui:

$$\{u'_m\}^e = [T]\{u_m\}^e \tag{9.4}$$

$$\{F'_m\}^e = [T]\{F_m\}^e$$

$$[T] = \begin{bmatrix} [L] & 0 & 0 \\ 0 & [L] & \\ 0 & 0 & [L] \end{bmatrix}$$

Standumų transformavimas:

$$[K] = [T]^T [K'] \ [T] \tag{9.5}$$

Taigi, kevalo b.e. formavimo algoritmas toks:

1. Kiekvienam elementui transformuoti mazgų koordinates iš globalinių į lokalines pagal $\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = [\lambda] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$. Tai – pakankamas pertvarkymas, kadangi koordinačių pradžios taško padėtis b.e. charakteristikoms įtakos neturi.

2. Lokalinėse koordinatėse formuoti $[K'], \{F'\}$.

3. Transformuoti $[K']$ į $[K]$ pagal (5), $\{F'\}$ į $\{F\}$ pagal atvirkščią 4-am dėsnį.

4. Įprastine procedūra gauti $[K_{ansamblio}], \{F_{ansamblio}\}, \ldots,$ gauti poslinkius globalinėse koordinatėse.

5. Kiekvienam baigtiniui elementui atrinkti jam priklausančius polinkius ir transformuoti juos į lokalines koordinates, gauti lokalinius įtempimus $\{\sigma'\} = [D'][B']\{u'_m\}^e$.

Tokioje sprendimo schemoje galimi skaitiniai keblumai dėl Q_z: kai visi b.e., sueinantys mazge k, komplanarūs, tai atitinkama lygtis lokalinėse koordinatėse yra 0 = 0 – neišsprendžiama lygčių sistema.
Vaistai: K_{Qz} priskirti fiktyvų mažą standumą. Tada lokalinėse koordinatėse turėsim:

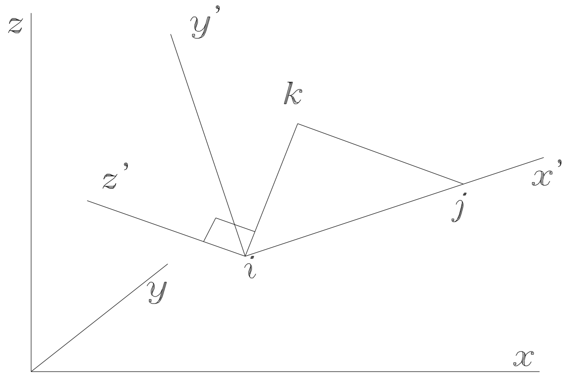
$$k'_{Qz} Q = 0,$$

po visos BEMo procedūros gausim kažkokias Q_z reikšmes, tačiau jos įtakos įtempimams neturės.

Bet: fiktyvus standumas priskiriamas <u>visiems</u>, ne tik komplanariems mazgams, todėl tai įtakoja visus poslinkius. Būtina parinkti kuo mažesnius tokius standumus, pavyzdžiui, $0.01 * E * h * \Delta$.

Lokalinių kosinusų matrica

Vienas iš galimų būdų nusakyti lokalines ašis: *x'* nukreipti išilgai elemento kraštinės *ij*; *y'* talpinti elemento plokštumoje, o *z'* – statmenai plokštumai, taip, kad *x' y' z'* būtų dešininė koordinačių sistema:



Kraštinė *ij* apibrėžiama vektorium $\{v_{ij}\}$:

$$\{v_{ij}\} = \begin{Bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{Bmatrix}$$

Kraštinės krypties kosinusai gaunami dalinant vektoriaus komponentus iš vektoriaus ilgio:

$$\{v_{x'}\} = \begin{Bmatrix} \lambda_{x'x} \\ \lambda_{x'y} \\ \lambda_{x'z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_{ij}} \begin{Bmatrix} x_{ji} \\ y_{ji} \\ z_{ji} \end{Bmatrix}, \quad l_{ij} = \sqrt{x_{ji}^{\ 2} + y_{ji}^{\ 2} + z_{ji}^{\ 2}}$$

z' ⊥ trikampio plokštumai, todėl ją patogu gauti vektorine $\{v_{ij}\}$ ir $\{v_{ik}\}$ sandauga:

$$\{v^*_{z'}\} = \{v_{ij}\} \times \{v_{ik}\} = \begin{Bmatrix} y_{ji} z_{ki} - z_{ji} y_{ki} \\ z_{ji} x_{ki} - x_{ji} z_{ki} \\ x_{ji} y_{ki} - y_{ji} x_{ki} \end{Bmatrix},$$

vektoriaus ilgis pagal sandaugos apibrėžimą yra 2Δ*:*

$$l_{z'} = \sqrt{\left(y_{ji} z_{ki} - z_{ji} y_{ki}\right)^2 + (\ldots)^2 + (\ldots)^2} = 2\Delta$$

Ašies *z'* krypties kosinusai:

$$\{v_{z'}\} = \begin{Bmatrix} \lambda_{z'x} \\ \lambda_{z'y} \\ \lambda_{z'z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta}\begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix}$$

Ašies *y'* krypties kosinusai gaunami vektorine $\{v_{z'}\}$ ir $\{v_{x'}\}$ sandauga; abiejų šių vektorių ilgiai jau normalizuoti, todėl dalyba iš ilgio nebereikalinga:

$$\{v_{y'}\} = \begin{Bmatrix} \lambda_{y'x} \\ \lambda_{y'y} \\ \lambda_{y'z} \end{Bmatrix} = \{v_{z'}\} \times \{v_{x'}\} = \begin{Bmatrix} \lambda_{z'y}\lambda_{x'z} - \lambda_{z'z}\lambda_{x'y} \\ \lambda_{z'z}\lambda_{x'x} - \lambda_{z'x}\lambda_{x'z} \\ \lambda_{z'x}\lambda_{x'y} - \lambda_{z'y}\lambda_{x'x} \end{Bmatrix}.$$

Galutinės pastabos

Plokštiems elementams (korektiškiems) formos funkcijos garantuoja funkcijos ir jos pirmų išvestinių suderinamumą tik tada, kai visi elementai yra vienoje plokštumoje. Kevalams elementai yra ne vienoje plokštumoje, todėl neišvengiamai randasi nesuderinamumas, kuris mažėja mažinant elementų diametrus.

Tinklelio tankis. Jei kevalas plonas, momentai žymesnę įtaką turi tik prie parėmimo kontūro, o kitur vyrauja membraninės jėgos. Membraniniai poslinkiai (deformacijos, įrąžos) pakankamai tiksliai suskaičiuojami grubiu tinklu; tuo tarpu prie kontūro būtinas itin smulkus tinklelis - kad būtų tiksliai gauti lenkimo momentai.