3. ERDVINIO ĮTEMPIMŲ BŪVIO ELEMENTAI

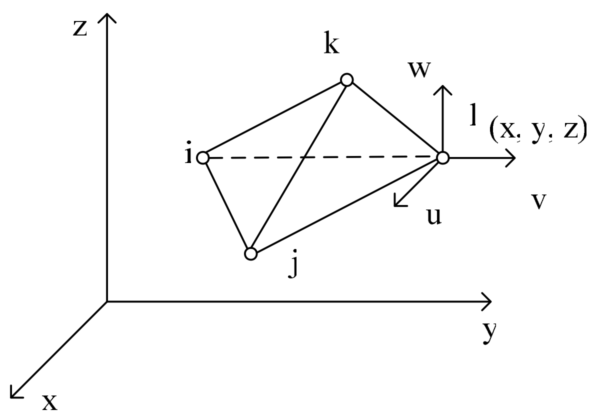
Erdvinius b.e. sukūrė 1962 - 65 m. R. Gallgaher, R. Melosh, J. Argyris.
3D b.e. nereikalauja jokių papildomų prielaidų matematiniam struktūros modeliui sudaryti – sprendiniai yra tiksliausi. Bet: naudojami rečiau nei 2D b.e. dėl reikalingų didelių skaičiavimų resursų; sunkesnė duomenų ir rezultatų virualizacija. Pavyzdys:

kvadratinė 2D sritis, 20 × 20 b.e. tinklelis. Taigi, 400 mazgų × 2 l.l. = 800 lygčių, minimalus juostos plotis – 40 (įmanoma taip sunumeruoti, kad būtų 20 susietų mazgų - kad viename b.e. mazgų numerių skirtumas būtų 20).

Ekvivalentiškas 3D uždavinys: 20 × 20 × 20 b.e. ≡ 8000 mazgų ×3 l.l. = 24000 lygčių, juostos plotis minimalus – 1200 (20*20 susietų mazgų).

Skaičiavimo resursai proporcingi lygčių skaičiui ir juostos pločiui kvadratu. Taigi, 3D uždaviniui reikia apie 27000 kartų didesnių resursų.

Nagrinėsim paprasčiausią 3D elementą – tetraedrą:



Numeracijos tvarka: pirmasis mazgas – bet kuri viršūnė; kiti mazgai numeruojami prieš laikrodžio rodyklę (žiūrint iš pirmojo mazgo pusės): *j i l k*, *k i j l*, …

Poslinkiai:

$$\{u_m\}^i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}, \qquad i = i, j, k, l$$ – 12 l.l. – reikės 12 interpoliacinės funkcijos komponentų

Unikalių komponentų bus tik 4: visiems poslinkiams *u, v, w* parinksime identišką kitimo dėsnį.

Parenkamas tiesinis polinomas su 12 nežinomų koeficientų; galėsim gauti 12 formos funkcijos komponentų:

$$\begin{aligned} &u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\ &v = \ldots \\ &w = \ldots \qquad\qquad \alpha_{12} z \end{aligned} \tag{3.1}$$

$\alpha_{1,} \alpha_{2,\ldots,} \alpha_{12}$ gaunami kaip ir elementui CST: į (1) įstatomos mazgų koordinatės, o dėsnis tada turi teikti atitinkamo mazgo mazginius poslinkius. Išsprendus gautas lygtis ir įrašius koeficientų α išraiškas, turim:

$$u = \frac{1}{6V} \sum_{i}^{i,j,k,l} \left(a_i + b_i x + c_i y + d_i z \right) u_i ,$$

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}, \qquad V \text{ - tetraedro tūris}$$

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad b_i = -\begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad c_i = -\begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix}, \quad d_i = -\begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}$$

Kiti koeficientai gaunami cikliškai keičiant indeksus.
Taigi,

$$\begin{aligned} &N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V}, \\ &N_j = \ldots \\ &N_k = \ldots \\ &N_l = \ldots \end{aligned}$$

Tokios formos funkcijos nusako ir poslinkių *v* bei *w* kitimą.

Deformacijos:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x} \\ \varepsilon_{y} \\ \varepsilon_{z} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \\ \partial w / \partial x + \partial u / \partial z \end{Bmatrix} \qquad \text{ir} \qquad \{\varepsilon\} = [B]\{u_m\}^e; \quad [B] \text{ matai } -6 \times 12$$

[B] dalis mazgui i:

$$[B_i] = \frac{1}{6v}\begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix}$$

– deformacijos elemento viduje yra pastovios.

Įtempimai:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \qquad (\sigma) = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}^T$$

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)\ (1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ symm. & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Standumo matrica:

$$[K] = \int_v [B]^T\ [D]\ [B]dv = v[B]^T\ [D]\ [B]$$

Mazginės jėgos:

$\{f\}_{\varepsilon 0}$:

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha \quad \Theta^e \\ \alpha \quad \Theta^e \\ \alpha \quad \Theta^e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \{f\}_{\varepsilon 0} = -[B]^T [D] \{\varepsilon_0\} V$$

$\{f\}_{\sigma 0}$:

$$\{f\}_{\sigma 0} = [B]^T \{\sigma_0\} V$$

$\{f\}_p$: p išskaidomas į komponentus $\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$; jei jie pastovūs elemente –

$$\{f\}_p = -\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \frac{V}{4}$$

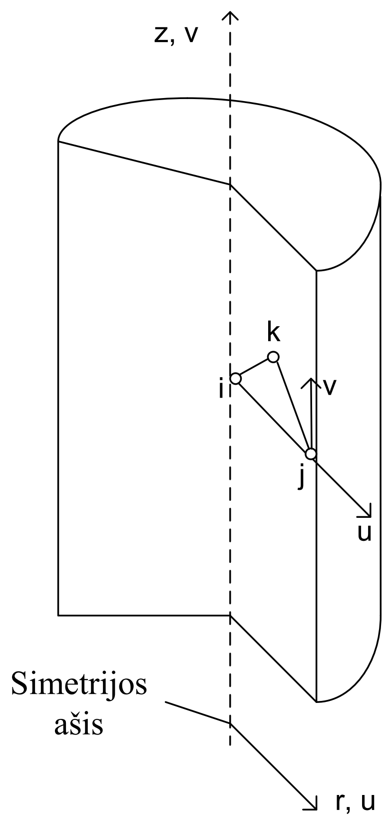
Galutinės pastabos

Diskretizavimas tetraedrais sunkus ir nevaizdus. Geriau naudoti “plytelės” elementus, sudarytus iš tetraedrų: galimi tik 2 sudalinimo į 5 tetraedrus būdai, nesunki programinė realizacija. Galima “plytelės” standumo matricą gauti abiems sudalinimams ir gautas standumo matricas suvidurkinti – žymiai išauga tikslumas.

Dabar tetraedrai praktiškai nenaudojami, nes jų tikslumas nepakankamas. Dažniausiai naudojami izoparametriniai elementai, turintys kintamą mazgų skaičių - nuo 8 iki 21; elemento modifikacija pasirenkama neįtraukiant vieno ar kito mazgo.

4. SIMETRINIO AŠIAI ĮTEMPIMŲ BŪVIO ELEMENTAI

Simetrinis kūnas, apkrautas simetrine apkrova (pavyzdžiui, indai su skysčiu). Matematiškai toks kūnas – 2D uždavinys, plokščiosios deformacijos atvejis: įtemptas / deformuotas būvis pilnai aprašomas dviem poslinkiais:



"Mazgai" i, j, k - ne mazgai, o apskritimų centrai.

Elemento i, j, k tūris, kuriame integruojama gaunant [K] ir $\{f\}_{\varepsilon_0,\sigma_{0,p}}$ – sukinio i, j, k tūris.

Poslinkiai:

$$\{u_m\}^i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad i = i,\, j,\, k$$

Poslinkių kitimui apibrėžti naudokim tas pačias kaip ir CST atveju formos funkcijas:

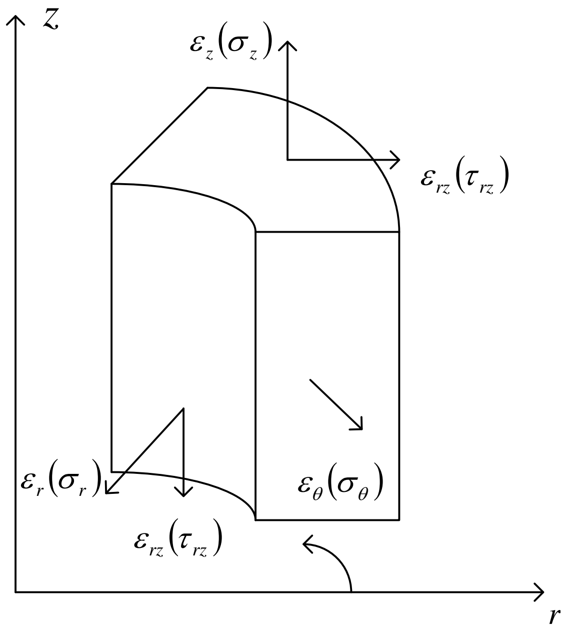
$$N_i = \frac{a_i + b_i r + c_i z}{2\Delta},$$

$$a_i = r_j z_k - r_k z_j$$
$$b_i = z_j - z_k$$
$$c_i = r_k - r_j\ ,$$

ir kitos 2 formos funkcijos analogiškai.

Deformacijos

Skirtingai nei 2D įtempimų būvio atveju, teks nagrinėti 4 deformacijas:



$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_o \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial v / \partial z \\ \partial u / \partial r \\ u / r \\ \partial u / \partial z + \partial v / \partial r \end{Bmatrix}, \tag{4.1}$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u_m\}$$

Turint omeny (1):

$$[B_i] = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ \dfrac{1}{r} N_i & 0 \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & \dfrac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0 & c_i \\ b_i & 0 \\ \dfrac{a_i}{r} + b_i + \dfrac{c_i z}{r} & 0 \\ c_i & b_i \end{bmatrix}, \qquad i = i, j, k$$

Taigi, [*B*] priklauso nuo *z* ir *r*. Tačiau deformacijos elemente pastovios, nes iš formos funkcijos matyti: *u* proporcingas *r*.

Įtempimai:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)\ (1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & & 1 & 0 \\ symm. & & & \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right) \end{bmatrix}$$

Standumo matrica

Integravimas elemento tūryje sudėtingesnis nei anksčiau, nes [B] priklauso nuo koordinačių. Galimi integravimo būdai:

- sudauginti visas po integralu esančias matricas ir integruoti kiekvieną narį atskirai
- integruoti skaitiškai, apytiksliai
- koordinačių centrą perkelti į elemento svorio centrą; tada

$$\bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_k}{3}, \qquad \bar{z} = \frac{z_i + z_j + z_k}{3} \qquad \text{ir} \qquad [K]^e = 2\pi\ [\bar{B}]^T [D]\ [\bar{B}]\ \bar{r}\Delta$$

Mazginės jėgos

Sąvoka jėgos: "išorinė jėga" - suma visų jėgų, veikiančių apskritimo ilgiu, kuris sudaro elemento "mazgą". Taigi, jei *R* yra jėga ilgio vienetui apskritimo radialine kryptim, o - *Z* simetrijos ašies kryptim, tai "išorinės jėgos" komponentai yra

$2\pi rR$ ir
$2\pi rZ$

$$\{f\}_{\varepsilon 0}: \quad \{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha\,\Theta^e \\ \alpha\,\Theta^e \\ \alpha\,\Theta^e \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \{f\}_{\varepsilon 0} = -2\pi \int_s [B]^T [D]\ \{\varepsilon_0\} r\,ds = -2\pi [\bar{B}]^T [D]\ \{\varepsilon_0\}\ \bar{r}\Delta$$

$\{f\}_{\sigma 0}$:

$$\{f\}_{\sigma 0} = 2\pi\ [\bar{B}]^T \{\sigma_0\}\ \bar{r}\Delta$$

$\{f\}_p$: perkėlus koordinačių ašis į svorio centrą:

$$\{f_p\} = -2\pi \begin{Bmatrix} R \\ Z \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \frac{\bar{r}\Delta}{3}$$

Galutinės pastabos

Kadangi [B] priklauso nuo koordinačių, įtempimai $\{\sigma\} = [D]\ [B]\{u_m\}$ yra nepastovūs elemente. Dažniausiai jie skaičiuojami elemento svorio centre, vietoj [B] imant $[\bar{B}]$.

Įmanoma panašius elementus naudoti ir tada, kai apkrova yra nesimetrinė ašiai.