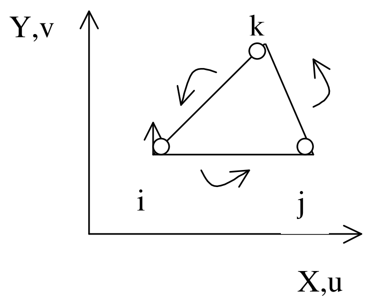
2. PLOKŠČIOJO ĮTEMPIMŲ BŪVIO BAIGTINIS ELEMENTAS CST

Plokščiojo įtempimo ir plokščiosios deformacijos problemos – pirmieji BEM taikymai: 1956-60 m.; R. W. Clough, M. I. Turner.

Nagrinėsim paprasčiausią įmanomą b.e. - trikampį, turintį mazgus viršūnėse. Poslinkių laukas plokščiojo įtempimo (arba deformacijos) atveju aprašomas 2 poslinkiais *u* ir *v* mazge:



$$\{u_m\}^i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \qquad \{u_m\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

B.e. priklausomybes formuluosim tiesiai <u>globalinėje</u> koordinačių sistemoje.

Formos funkcijos: po 3 unikalias funkcijas poslinkiams u ir v:

$$\{u\} = \sum_{i=1}^{6} N_i u_i , \qquad \{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Joms gauti parenkame pačius paprasčiausius – tiesinius pilnus interpoliacinius polinomus:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Tokiose funkcijose turime 6 nežinomus koeficientus α - tiek pat, kiek ir mazginių poslinkių. <u>Tik išpildžius tokią sąlygą</u> įmanoma f.f. nežinomus koeficientus išreikšti per mazginius poslinkius ir mazgų koordinates. Tam: į (1) įstatome paeiliui mazgų koordinates – turėsime gauti mazginius poslinkius:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i = u_i$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j = u_j$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k = u_k$$

Analogiškai gaunamos 3 lygtys poslinkiams v.

Išsprendus lygtis ir $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ išraiškas įstačius į (1):

$$u = \frac{1}{2\Delta}\left((a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_k + b_k x + c_k y)u_k\right), \qquad (2.2)$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j,$$
$$b_i = y_j - y_k = y_{jk},$$
$$c_i = x_k - x_j = x_{kj},$$

kiti koeficientai gaunami ciklišku indeksų keitimu: $i \to j \to k \to i$

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = 2 \cdot \left\langle trikampio \quad ijk \quad plotas \right\rangle$$

Analogiškai:

$$v = \frac{1}{2\Delta}\left((a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_k + b_k x + c_k y)v_k\right), \qquad (2.3)$$

Turint omenyje f.f. apibrėžimus:

$$u = \sum_i^{i,j,k} N_i u_i, \qquad v = \sum_i^{i,j,k} N_i v_i,$$

(2) ir (3) galim perrašyti

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k,$$
$$v = N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k,$$

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta}, \qquad (2.4)$$

. . .

Deformacijos

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \partial u/\partial y + \partial v/\partial x \end{Bmatrix}$$

Užduotis savarankiškam darbui: parodyti, kad

- f.f. tenkina pilnumo reikalavimą
- f.f. tenkina suderinamumo reikalavimą (C^0 suderinamumas)

BEMe deformacijos užrašomos:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u_m\}^e, \qquad \{u_m\}^e = \{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_k \quad v_k\}^T$$

Užduotis savarankiškam darbui: gauti [B] išraiškas

$$[B] = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}$$

Taigi, deformacijos b.e. viduje nepriklauso nuo koordinačių – deformacijos elemento plote pastovios. Todėl elementas vadinamas CST – *Constant Strain Triangle*.

Įtempimai

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

Plokščiajam įtempimui:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Plokščiajai deformacijai:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Standumo matrica:

$[K]^e = \int\limits_v [B]^T [D]\ [B] dv =$ <jei elemento storis pastovus> $= t\int\limits_s [B]^T [D]\ [B] ds =$

<jei medžiagos savybės elemento plote pastovios> $= t\Delta [B]^T [D]\ [B]$

Užduotis savarankiškam darbui: gauti $[K]^e$ išraiškas vienam unikaliam blokui plokščiojo įtempimo atveju.

Taigi,

$$\left[K_{ij}\right] = \frac{Et}{4\Delta\left(1-\nu^2\right)}\begin{bmatrix} b_i b_j + \frac{1-\nu}{2} c_i c_j & \nu b_i c_j + \frac{1-\nu}{2} c_i b_j \\ \nu c_i b_j + \frac{1-\nu}{2} b_i c_j & c_i c_j + \frac{1-\nu}{2} b_i b_j \end{bmatrix},$$

$$[K]^e = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] \end{bmatrix}$$

Mazginės jėgos

Mazginės jėgos nuo pradinių deformacijų $\{f\}_{\varepsilon 0}$:
Plokščiajam įtempimui

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \alpha & \Theta^e \\ \alpha & \Theta^e \\ & 0 \end{Bmatrix},$$

čia

α - šiluminio plėtimosi koeficientas,

Θ - temperatūros skirtumas tarp realios temperatūros elemente ir temperatūros, prie kurios nėra pradinių įtempimų .

Plokščiajai deformacijai

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \alpha & \Theta^e \\ \alpha & \Theta^e \\ & 0 \end{Bmatrix}(1+\nu)$$

$$\{f\}_{\varepsilon 0} = -\int_v [B]^T [D]\{\varepsilon_0\} dv = \langle .....\rangle = -[B]^T [D]\{\varepsilon_0\} t\Delta$$

Mazginės jėgos nuo pradinių įtenpimų $\{f\}_{\sigma 0}$:

$$\{f\}_{\sigma 0} = \int_v [B]^T \{\sigma_0\} dv = \left\langle jei\ \sigma_0\ pastov\bar{u}s\ \ elemente \right\rangle = [B]^T \{\sigma_0\} t\Delta$$

Mazginės jėgos nuo tūrinių poveikių $\{f\}_p$: tūrines jėgas išskaidome į komponentus globalinių ašių atžvilgiu: $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$.

$$\{f\}_p^{\ m} = -\int_v N^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} dv = \ <jeigu\ j\dot{e}gos\ elemente\ pastovios> \ = -\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}\int_v N^m dv =$$

$$= \left\langle \frac{jeigu\ \ koordinaciu\ \ centras\ \ elemento\ \ svorio\ \ centre}{\int_v x dv = \int_v y dv = 0,\ \ o\ \ a_i = a_j = a_k = \frac{2\Delta}{3}} \right\rangle = -\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \frac{a_m}{2}, \quad m = i, j, k$$

Visam elementui

$$\{f\}_p = -\begin{Bmatrix} x \\ y \\ x \\ y \\ x \\ y \end{Bmatrix}\frac{\Delta}{3}$$ – jėgos paskirstomos tarp mazgų po lygiai

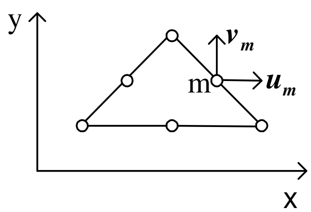
Įtempimų skaičiavimas

Po ansamblio sudarymo, kraštinių sąlygų įvedimo, lygčių sistemos sprendimo: kiekvienam b.e. atrenkami jam priklausantys $\{u_m\}$, ir $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{u_m\}$ (jei yra, reikia įvertinti ir $-[D]\{\varepsilon_0\} + \{\sigma_0\}$)

Taigi, įtempimai elemente pastovūs. Paprastai jie adresuojami elemento svorio centrui. Įtempimai mazguose: vidurkis įtempimų baigtinių elementų, turinčių nagrinėjamąjį mazgą. Galimas svorinis vidurkinimas.

Galutinės pastabos

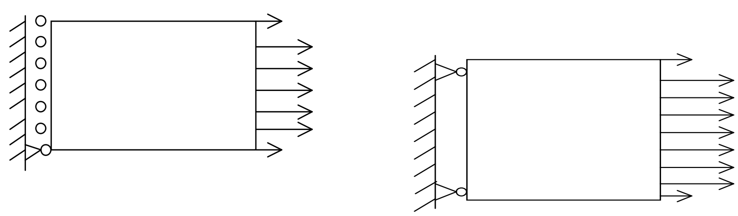
Elemento CST tikslumas - nepatenkinamas. Praktiškai elementas nenaudojamas. Pakankamas yra elemento LST tikslumas:



– tas pat tikslumo lygis su LST pasiekiamas prie mažesnio l.l. kiekio, nei su elementais CST.

Užduotys:

kur bus gauti tikslesni rezultatai esant vienodam b.e. tinkleliui ?



kur reikia tankesnio tinklelio ?