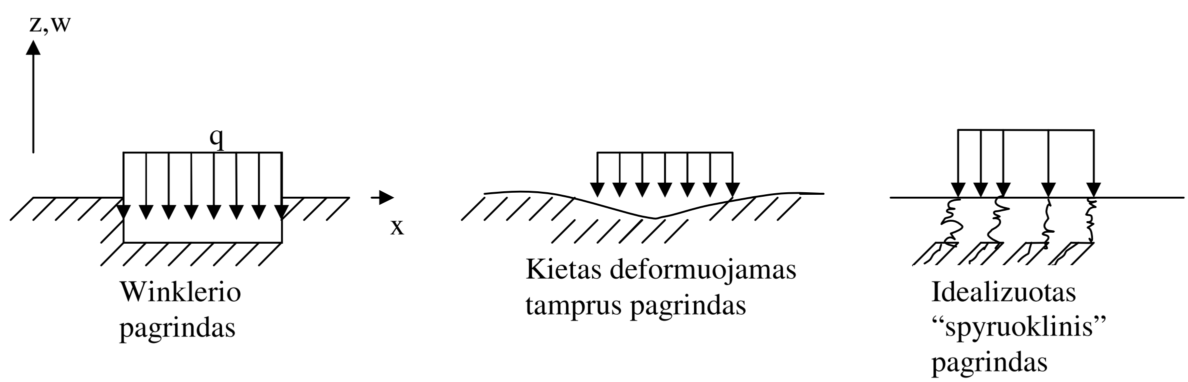
14. TAMPRUS PARĖMIMAS

Pavyzdys: geležinkelio bėgis ant sankasos; turi būti analizuojamas tik pats bėgis.
Pagrindas įvertinamas „pamato standumo matrica“ $[\,K_f\,]$. Jei struktūros standumas yra $[\,K_s\,]$, tai pilnas standumas yra $[\,K_s\,] + [\,K_f\,]$. $[\,K_f\,]$ pridedama tik bendriems struktūros – pagrindo mazgams.

Pagrindo modeliai:



Winklerio pagrindas.

Jo tamprumo modulis - β, plotas – A, w – vertikalus poslinkis nuo apkrovos F. Jėgos prieaugis iššauks poslinkį:

$dF = \beta\, w\, d\,A$

Pagrindo deformacijos energijos prieaugis

$$dU = \frac{1}{2} dF \times w = \beta w^2 dA / 2$$

Įlinkis w yra toks pat, kaip struktūros elemento, todėl jam turi galioti to elemento formos funkcijos:

$$U = \frac{1}{2}\int_A \beta w^2 dA = \frac{1}{2}\int_A w^T \beta w dA = \frac{1}{2}\{u_m\}^T \left[K_f\right]^e \{u_m\},$$

skaliaras

$$\left[K_f\right] = \int_A \beta [N]^T [N] dA \qquad (1)$$

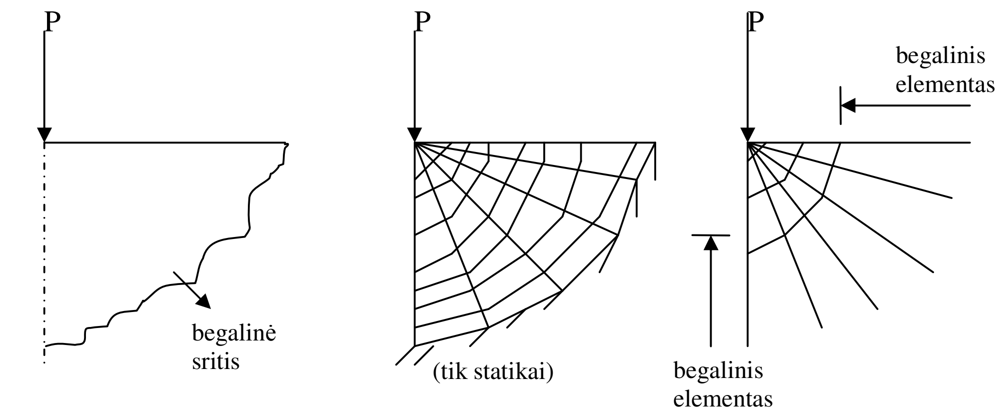
Galima imti ir supaprastintas formos funkcijas; pavyzdžiui , jei struktūra – lenkiama plokštelė – imti tik *[N]* $C°$ suderinamumo ir tik įlinkiui *w*. *[K_f]* šiuo atveju turės nulines eilutes ir stulpelius sukimo l.l.

Paprasčiausias – **„spyruoklinis“ pagrindas**:

Pagrindo pasipriešinimo jėga yra $\beta A w$. Jei pagrindo paviršiuje bus *n* struktūros b.e. tinklo mazgų, vienos spyruoklės standumas $\beta A / n$. Šie standumai pridedami prie diagonalinių *[K_s]* elementų, atitinkančių įlinkio l.l. – *w*.

BEGALINIAI BAIGTINIAI ELEMENTAI

Pavyzdys:



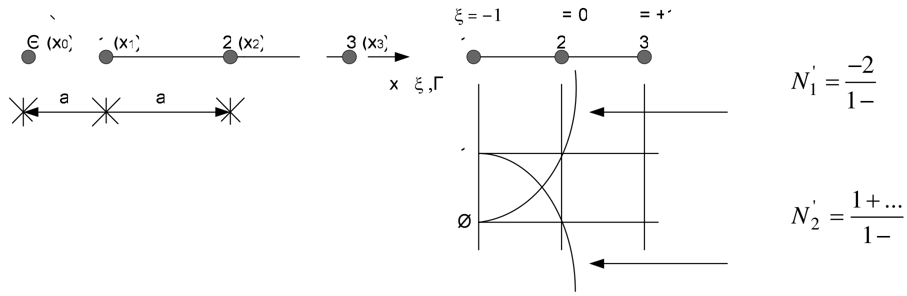
Nagrinėsime begalinius elementus statikos uždaviniui.

Tai – analogas tampriam pagrindui. σ/ε begaliniuose elementuose nedomina.

Galimi sprendimo būdai:

1) parinkti tokias f.f., kurios teikia 0 kai koordinatė $\rightarrow \infty$;
2) geometrijai apibrėžti imti atskiras f.f., kurios neapibrėžtai auga, koordinatei $\rightarrow \infty$.

Antrasis būdas – paprastesnis. Jo iliustracija 1D elementui:



$$X \;=\; N_1^{'}x_1 + N_2^{'}x_2\,, \tag{1}$$

$$N_1^{'} = \frac{-2\xi}{1-\xi}\,, \qquad N_2^{'} = \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

Taigi,

$x = x_1$ prie $\xi = -1$

$x = x_2$ prie $\xi = 0$

$x = \infty$ prie $\xi \to 1$ $\left(= \dfrac{-2\xi x_1 + (1+\xi)x_2}{1-\xi} = \infty \right)$ - 3-ias mazgas nukeliamas į begalybę; jo tiksli vieta nežinoma.

Nežinomai funkcijai Φ parenkamas kitimo dėsnis (3 – jų mazgų elementui – kvadratinis):

$$\Phi = \left[\frac{-\xi+\xi^2}{2} \left(1-\xi^2\right) \frac{\xi+\xi^2}{2} \right] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

– izoparametrinis elementas su specifinėmis *[N']*. Sustačius *[K]*, įvesti kraštinę sąlygą $\Phi_3 = 0$.

Pastaba. (1) išsprendus ξ atžvilgiu ir įvedus $x = x_{\circ} + r$:

$$\xi = \frac{x - x_2}{x - 2x_1 + x_2} = 1 - \frac{2a}{r};$$

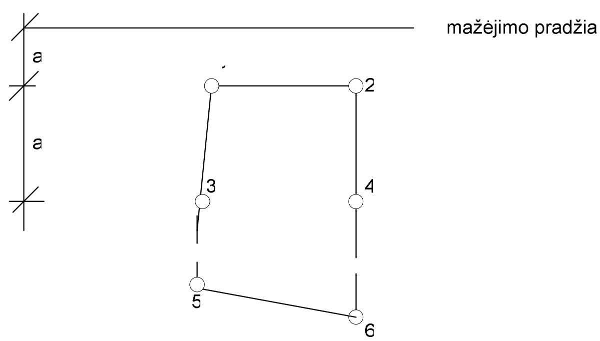
ją įstačius į (2):

$$\Phi = \Phi_3 + (-\Phi_1 + 4\Phi_2 - 3\Phi_3)\frac{a}{r} + (2\Phi_1 - 4\Phi_2 + 2\Phi_3)\frac{a^2}{r^2}$$

Iš čia: kai $r \to \infty$, $\Phi \to \Phi_3$; Φ_3 kraštinė sąlyga užduodama nuline reikšme. Bet kai, $r \to 0$,

$\Phi \to \infty$ taške Φ su koordinate $x_{\circ}$. Tai – singuliarus taškas.

2D begalinis elementas:



$$N_1' = \frac{-2\xi}{1-\xi}\frac{1-\eta}{2}$$

$$N_2' = \frac{-2\xi}{1-\xi}\frac{1+\eta}{2}$$

$$N_3' = \frac{1+\xi}{1-\xi}\frac{1-\eta}{2}$$

$$N_4' = \frac{1+\xi}{1-\xi}\frac{1+\eta}{2}$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi + \xi^2)(1-\eta)$$

. . .

SUBSTRUKTŪROS

Esmė: superelementas su šalinamais vidiniais l.l.

Procedūra:

1. sudalinimas į substruktūras (pavyzdžiui, lėktuvo konstrukcija – į sparną, fiuzeliažą, galinį sparną);
2. *[K]* ir *{ F }* substruktūrai skaičiavimas. Vidinių l.l. eliminavimas

$$([K]_{red} = [K_{11}] - [K_{12}]^T [K_{22}]^{-1} [K_{12}])$$

$$(\{ F \}_{red} = - [K_{12}]^T [K_{22}]^{-1} \{F_2\} + \{F_1\})$$

   Paliekami tik „jungiamieji“ l.l.

3. Substruktūrų sujungimas į struktūrą. Sprendimas „jungiamųjų“ mazgų poslinkiams;
4. Kiekvienai substruktūrai atkuriami pašalintieji l.l.

$$(\{u_2\} = -[K_{22}]^{-1} ([K_{21}] \{ u_1 \} - \{ F_1 \}))$$

Pranašumai:

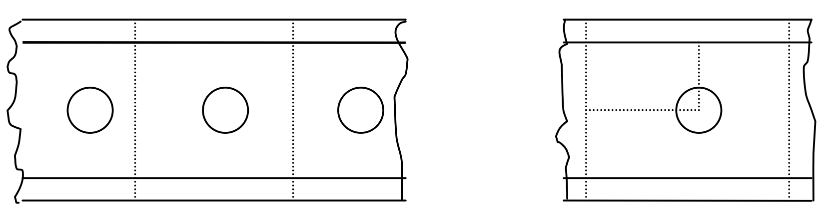
- efektyvu, jei santykis (jungiamieji l.l.)/(visi l.l.) mažas;
- galima sudalinti darbą į kelias nepriklausomas šakas;
- keičiant ką nors vienoje substruktūroje, kitos neliečiamos;
- statinėje analizėje papildomų paklaidų nekyla (dinaminėje – nedidelės papildomos paklaidos)

Trūkumai:

- sudėtingesnė programa
- reikia efektyvių duomenų struktūrų ir duomenų mainų

Jei struktūrą reikia išanalizuoti vienąkart, geriau substruktūrų nenaudoti.

Tokiu būdu galima analizuoti ir cikliškas struktūras:

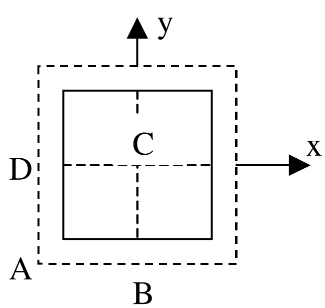


15. SIMETRINĖS STRUKTŪROS

Struktūrų, pasižyminčių formos, medžiagos, kraštinių sąlygų, apkrovos simetrija (antisimetrija), galima analizuoti tik unikaliomis savybėmis pasižyminčią dalį.

Pavyzdžiai:

1. kraštinės sąlygos kvadratui ABCD:



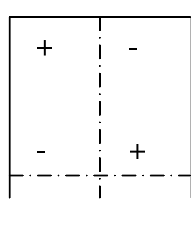
q, P centre

$w = 0 \quad \in AB, AD$

$\Theta_x = 0 \quad \in BC$

$\Theta_y = 0 \quad \in CD$

2.



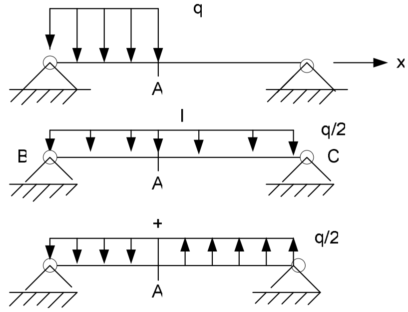
q, antisimetrinė

$w = 0$

$\Theta_x = 0 \quad \in CD$

$\Theta_y = 0 \quad \in BC$

3.



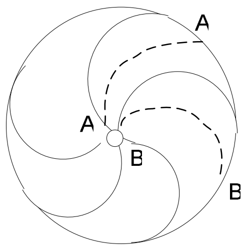
w = 0

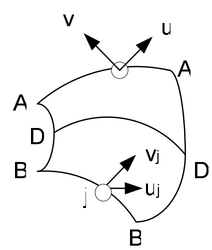
w = 0

Pastaba: dinamikos uždaviniuose, nagrinėjant tik simetrinę dalį, prarandamos kai kurios tikrinės svyravimų formos.

CIKLINĖ SIMETRIJA

Pavyzdys:





Ciklinės koordintės

$$[\,K\,]\{\,u\,\} = \{\,F\,\},$$

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IA} & K_{IB} \\ K_{IA}^T & K_{AA} & K_{AB} \\ K_{IB}^T & K_{AB}^T & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I \\ u_A \\ u_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_I \\ R_A \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_A \\ F_B \end{Bmatrix},$$

$\{ u_I \}$ – l.l., atitinkantys visus vidinius mazgus,

$\{ u_A \}$ – interfeiso A-A l.l.,

$\{ u_B \}$ – interfeiso B-B l.l.,

$\{ F_B \} = - \{ F_A \}$ – jėgos, kylančios nuo atmestųjų struktūros dalių poveikio į tiriamąją dalį,

$\{ R \}$ – tūrinės jėgos (pvz., inercijos). $\{ R_B \} = 0$, nes interfeise veikiančios jėgos pridedamos vienąkart (įsivaizduokim visą struktūrą – pridedant jėgas abiejuose jos interfeisuose, tūrinių jėgų būtų pridėta dvigubai).

Ciklinėse koordinatėse taip pat $\{ u_B \} = \{ u_A \}$. Tada, pritaikius transformavimo procedūrą:

$$\begin{Bmatrix} u_I \\ u_A \\ u_B \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u_I \\ u_A \end{Bmatrix}, \qquad [T] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Ciklinės dalies standumo matrica ($[\ T\ ]^T\ [\ K\ ]\ [\ T\ ]$) bus:

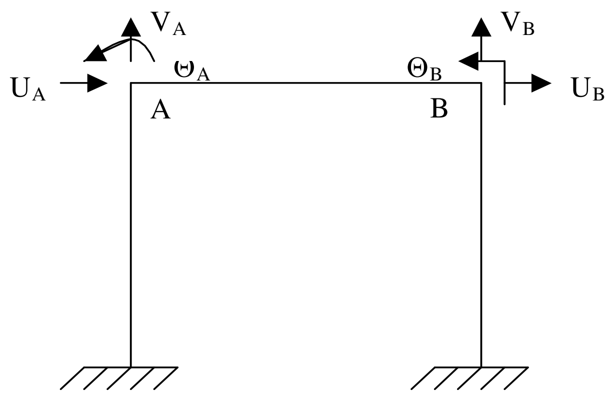
$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IA} + K_{IB} \\ K_{IA}^T + K_{IB}^T & K_{AA} + K_{AB} + K_{AB}^T + K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I \\ u_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_I \\ R_A \end{Bmatrix},$$

o jėgos, kylančios dėl atmestųjų dalių, išsibalansuoja.

Galima tą pat efektą gauti automatiškai, sugeneravus $[\ K\ ]$ ir po to interfeisui B-B suteikus interfeiso A-A mazgų numerius.

SUVARŽYMAI

Pavyzdys



Būtini suvaržymai, liečiantys:

- vieną mazgą ($V_A = 0,\ V_B = 0$)
- kelis mazgus ($U_A = U_B$)

Lieka be jokių papildomų sąlygų: U_A, Θ_A ir Θ_B.

Transformacijos lygtis suvaržymams:

[c] { u }= { Q },

[c] – stačiakampė matrica; konstantos, { Q } – konstantos, dažniausiai 0

$$[\ c_r\ c_e\ ]\begin{Bmatrix} u_r \\ u_e \end{Bmatrix} = 0 \quad (\ 1\ )$$

{ u_r} – išsaugoti poslinkiai, { u_e} – eliminuotini

Iš (1):

$$\{\ u_e\} = -\ [\ c_e]^{-1}[c_r]\ \{u_r\} \qquad (\ 2\ )$$

$$[\ c_{re}] = -\ [\ c_e]^{-1}[\ c_r]$$

Iš (1) ir (2):

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_e \end{Bmatrix} = [T]\{u_r\}, \qquad [\ T\ ]= \begin{bmatrix} I \\ c_{re} \end{bmatrix}$$

Toliau – jau žinomos transformacijos: { F }= [T]^T { F }

$$[\,K\,] = [\,T\,]^T\,[\,K'\,]\,[\,T\,]$$

Jei [K] lygtį sudalinsime taip:

$$\begin{bmatrix} K_{rr} & K_{re} \\ K_{ee}^T & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_r \\ F_e \end{Bmatrix},$$

$$\left[K_{rr} + K_{re}C_{re} + C_{re}^T K_{er} + C_{re}^T K_{ee} C_{re}\right]\{u_r\} = \left\{F_r + C_{re}^T F_e\right\} \qquad (3)$$

$$[\,K_{red}] \qquad \{u_r\} = \qquad \{\,F_{red}\,\}$$

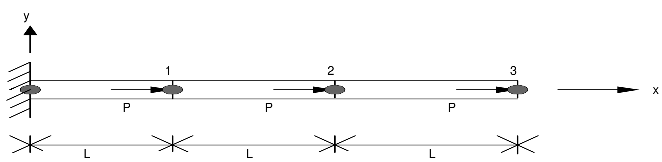
Išsprendus (3), eliminuoti poslinkiai {u_e } būtų gauti iš (2).

Jei {Q}$\neq$ 0, (3) lygtis būtų sudėtingesnė.

Jei { u_e }turi būti lygūs nuliai, tai (3) lygtis atitinka jau žinomų kraštinių sąlygų įvedimo būdą – eilučių ir stulpelių eliminavimą.

Patogiausia (3) taikyti paeiliui vienam l.l.: bus išvengta matricų aritmetikos.

Skaitinis pavyzdys:



Po kraštinių sąlygų įvedimo, statikos lygtis yra:

$$\begin{bmatrix} 2K & -K & 0 \\ -K & 2K & -K \\ 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \\ P \end{Bmatrix}$$

Tegu suvaržymas $u_2 = u_3$ įvedamas. Tegu eliminuojamas u_3 .

Tada (1):

$$[\,0\ 1/\ -1\,] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = 0, \qquad (4)$$

c_r c_e

(2):

[C_{re}] = [0 1],

$$[\,T\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o po transformacijų $[T]^T [K'] [T]$ ir $[T]^T \{F'\}$:

$$\begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 2P \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} u_1 = 3P/K \\ u_2 = 5P/K \end{matrix}$$, 0 iš (4) $u_3 = u_2 = 5P/K$

Lygtis (3) skiriasi nuo lygties, kuri būtų gauta statinio kondensavimo būdu. Kondensavimo metu šalinami l.l. susiejami su išsaugojimais l.l. statinės pusiausvyros lygtimis. Suvaržymo metu šalinami l.l. susiejami su išsaugomais l.l. užduotomis suvaržymų lygtimis, kurios gali būti ir klaidingos.

LAGRANGE DAUGIKLIŲ METODAS SUVARŽYMAMS

Metodas taikomas max ar min funkcijos, kuri priklauso nuo susietų kintamųjų rasti. Mechanikoje funkcija – potencinė energija Πρ , kintamieji – poslinkiai { u }.

Pritaikius metodą, nežinomųjų šeima uždaviniui išaugs iki { u }+ { λ }.

Tegu suvaržymai teikiami taip, kaip anksčiau (1):

[C] {u} – {Q}= 0 (1)

(1) padauginam iš matricos eilutės $\{\lambda\}^T$; matiškumas – kiek yra suvaržymų.

Rezultatas bus taip pat nulis. Jį pridedam prie Πρ:

$$\Pi\rho = \frac{1}{2}\{u\}^T[K]\{u\} - \{u\}^T\{F\} + \{\lambda\}^T([C]\{u\} - \{Q\})$$

Pritaikom Πρ stacionarumo sąlygą: $\frac{\Pi\rho}{\{u\}^T} = 0$ ir $\frac{\Pi\rho}{\{\lambda\}^T} = 0$;

$$\frac{\Pi\rho}{\{u\}^T} = [K]\{u\} - \{F\} + \{\lambda\}[C]^T = 0$$

$$\frac{\Pi\rho}{\{\lambda\}^T} = [C]\{u\} - \{Q\} = 0$$

Pateikiam rezultatą formoje:

$$\begin{bmatrix} K & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

(5) reikia išspręsti {u} ir $\{\lambda\}$ atžvilgiu. $\{\lambda\}$ interpretacija : jėgos, kurias reikia pridėti suvaržymų įgyvendinimui.

Tas pat skaitinis pavyzdys:

$$\begin{bmatrix} 2K & -K & 0 & 0 \\ -K & 2K & -K & 1 \\ 0 & -K & K & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (6)$$

(6) sprendinys yra: $\{u_1, u_2, u_3 \lambda\}^T = \left\{ \frac{3P}{K} \frac{5P}{K} \frac{5P}{K} - P \right\}$.

λ daugiklis (-P) nesvarbus; priklauso nuo [C] užrašymo formos.

[C] = [0 -1 1] teiktų λ = +P.

“BAUDOS“ FUNKCIJŲ METODAS SUVARŽYMAMS

Tai yra apibendrinimas apytiksliam kraštinių sąlygų įvedimo būdui.

Tegu (1) perrašoma taip:

{ t }= [C]{ u }- { Q } (7)

Jei { t } = 0 – turim jau nagrinėtą atvejį. Tegu { t } $\neq$ 0, o baudos funkcija – $\{t\}^T$ $[\alpha]\{t\}/2$; ją pridėkim prie Πρ funkcionalo:

$$\Pi\rho = \frac{1}{2}\{u\}^T[K]\{u\} - \{u\}^T\{F\} + \frac{1}{2}\{t\}^T[\alpha]\{t\}$$

Išreikšime {t} pagal (1), panaudosime stacionarumo sąlygą:

$$\left([K] + [C]^T[\alpha][C]\right)\{u\} = \{F\} + [C]^T[\alpha]\{Q\} \qquad (8)$$

Interpretacija (8): jei $[\alpha] = 0$ - suvaržymai ignoruojami

jei $[\alpha]$ auga – {u} keičiasi taip pat, kad suvaržyme bus vis tiksliau atspindėti.

α_i reikšmes turiparinkti pats skaičiuotojas. Kai α_i labai dideli galimi skaitiniai nestabilumai.

Kai kuriais atvejais baudų funkcijos natūraliai įvedamos [K] matricai: kai turi labai didelius, lyginant su kitais, standumus. Juos galima interpretuoti kaip baudas.

Pavyzdys: nesuspaudžiamos medžiagos (guma, skysčiai): υ = 0.5, tamprumo matricos daugiklis yra ∞. Galima imti $\upsilon \approx 0.49$ – blogai sąlygos lygtys, o { υ } labai priklauso nuo υ. Paaiškinimai:

Tamprumo matricą suformuluokim naudodami šlyties ir tūrinį modulius:

$$G = \frac{E}{2(1+v)}, \qquad B = \frac{E}{3(1-2v)}$$

Tamprumo matrica dabar:

$$[D] = G\begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 & -2/3 & & & \\ -2/3 & 4/3 & -2/3 & & 0 & \\ -2/3 & -2/3 & 4/3 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$[K] = G\int_v [B]^T [D_G][B]dv + B\int_v [B]^T [D_B][B]dv,$$

arba

$$\left(G[K_G] + B[K_B]\right)\{u\} = \{F\} \qquad (8)$$

Kai $\upsilon \to 0.5$, B$\to \infty$: veikia panašiai, kaip baudos funkcija, įvesdama nesuspaudžiamumo sąlygas. Prie $\upsilon \approx 0.5$ BEM sprendinys “ užsikerta“, nes (8) turi sprendinį tik prie { u }= 0. Vienintelis galimas nenulinks { u } sprendinys bus tik, jei [K_B] singuliari.

Kokios eilės geriausia rinktis α ?

Jei kompiuterių žodis garantuoja p reikšminių skaitmenų, geriausia bauda $\sim\alpha \leq 10^{P/2}$.