

12. MODELIAVIMO BEM_u PAGRINDAI. KOORDINAČIŲ TRANSFORMAVIMO VEDINIAI

Modeliavimo tikslas – gauti norimo tikslumo struktūros atsaką į poveikius. Labai smulkus b.e. modelis duos „tikslų“ atsaką, tačiau jo skaičiavimų kaina bus per aukšta.

Todėl bendriausia modeliavimo taisyklė:

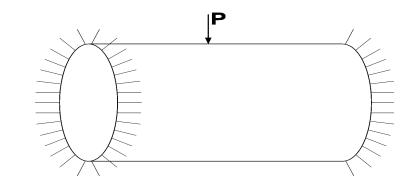
pradėti nuo paprasto modelio ir analizuojant gautus rezultatus nuspręsti, ar reikia smulkesnio modelio, ar reikia smulkesnio tinklo atskirose zonose ir pan.

Modeliavimo žingsniai:

- išsiaiškinti struktūros geometriją, kraštines sąlygas, apkrovas, medžiagų savybių ir geometrinių savybių šuoliško kitimo zonas;
- išsiaiškinti ar būtina modeliuoti visą struktūrą, ar būtinas 3D uždavinys, 2D ar 1D uždavinys;
- išsiaiškinti kokio tipo b.e. naudotini. Tai priklauso ne tik nuo uždavinio, bet ir nuo laukiamų rezultatų:

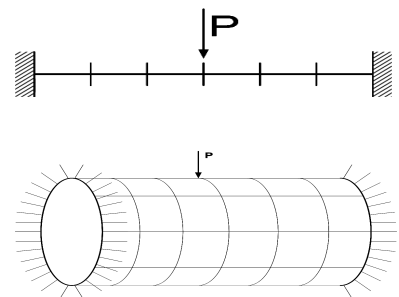
Pavyzdžiai:

1.

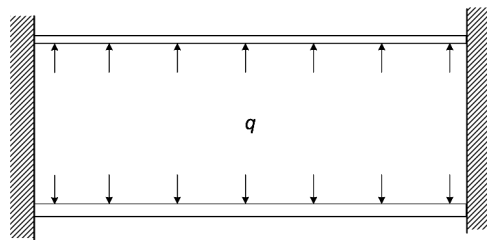


tuščiaviduris cilindras

jei reikia įlinkio
jei reikia įtempimų

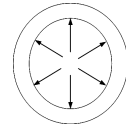


2.

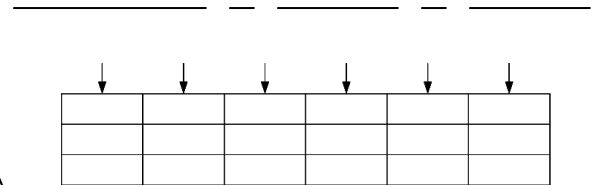


cilindras su vidiniu slėgiu

plokščiosios deformacijos 2D
uždavinys:

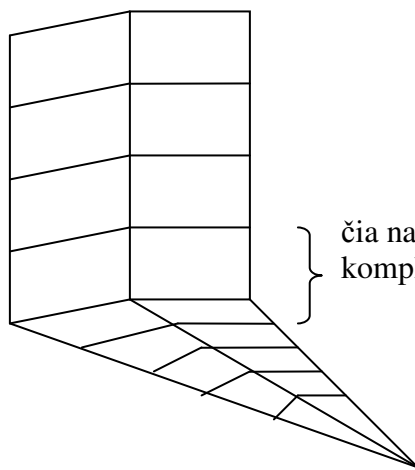


ašisimetrinis 2D uždavinys:



3D uždavinys, sienutę
modeliuojant “plytelės” tipo
elementais

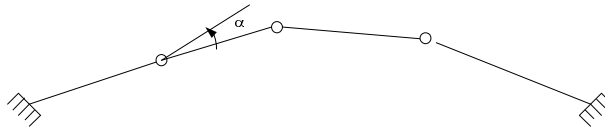
3. gal reiks kelių tipų b.e. ?:
rezervuaro dugno ir sienutės fragmentas



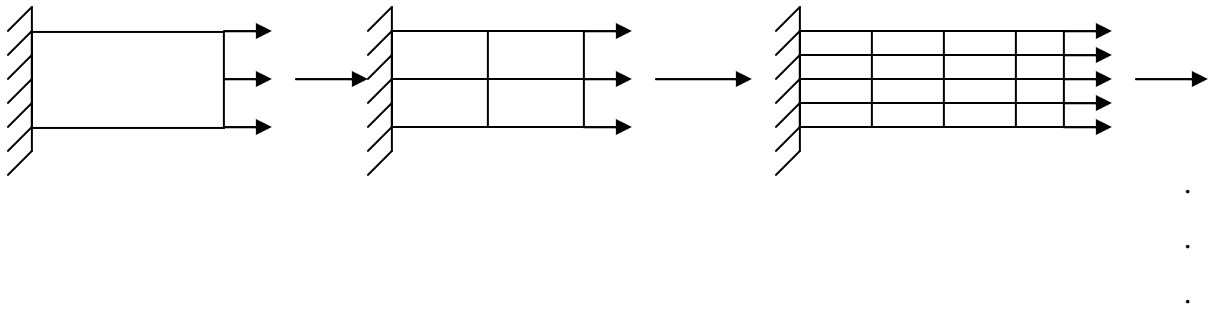
čia naudoti 3D b.e.; bus keblumų su skirtingais l.l.
komplektais perėjimo iš vieno tipo b.e. į kito tipo
b.e. zonose

Bendrieji reikalavimai / rekomendacijos modeliui:

- įvesti mazgus jėgų pridėjimo vietose, atramų vietose; vietose, kur kinta medžiaga ar skerspjūviai; vietose, kur norime gauti informaciją apie įtempimus,...
- b.e. tinklas, jei galima, turėtų būti reguliarus ir tolygus. Tačiau kur yra poveikių gradientai,, turėtų būti smulkesnis;
- reikėtų naudoti, jei tik galima, stačiakampius 2D, „plyteles“ 3D b.e.;
- lenkiamoms plokštelėms: tarp gretimų b.e. kampas turi neviršyti 10° :



- įtempimams tinklas turi būti smulkesnis, nei skaičiuojant vien tik poslinkius;
- būtina konvergavimo studija:

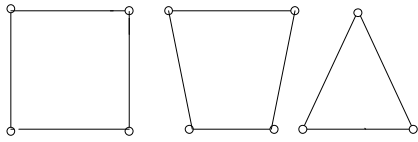


- kreipti dėmesį į b.e. formą („aspect ratio“):

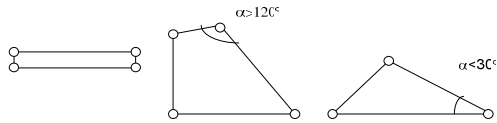
Jei įtempimų laukas prognozuojamas tolygus, kraštinių santykis turėtų būti ~ 1 .

Priimtini rezultatai 2D uždaviniui su menkai kintančiais įtempimais bus gauti ir santykiui

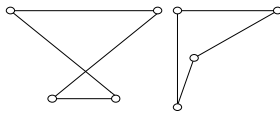
40. Tačiau laikoma: poslinkių skaičiavimui santykis turi būti ≤ 10 , įtempimų - ≤ 3 .



tinkamas kraštinių santykis

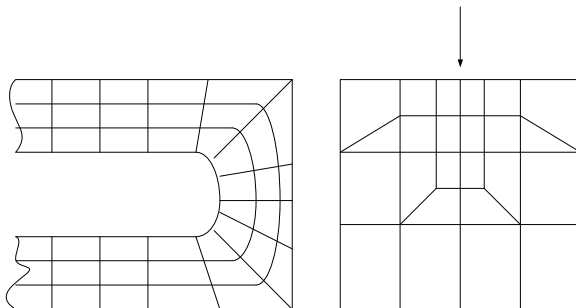


blogas

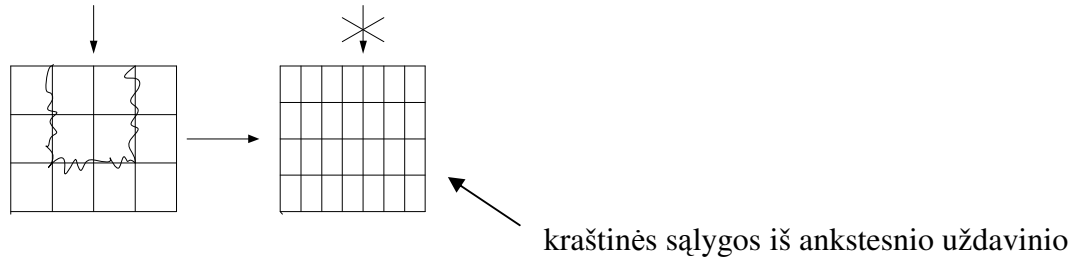


neleistinas

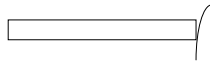
- kreipti dėmesį gretimų b.e. „dydžiams“. „Dydžių“ santykis turėtų būti ≤ 2 ;
- geometrijos netolygumų (kiaurymių, plyšių,...) ar poveikių netolygumų (konc. jėgos, ...) modeliavimui – arba naudoti tinklo smulkinimą, arba modeliuoti 2 žingsniais:



arba

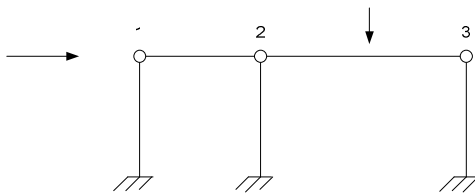


- medžiagų savybių netolygumams – panašūs į aukštesnius algoritmus; Puasono koeficientui: patikrinti jo reikšmės anizotropinėms ar sluoksniuotoms medžiagoms (turi būti $0 < \nu < 0.5$);
- vengti b.e. su dideliais standumų skirtumais; tai – blogo matricų sąlygotumo priežastis;
- tinkamai idealizuoti kraštinės sąlygas: strypams:



tik lenkiamiesiems strypams !

- tinkamai įvesti ryšius konstrukcijose:



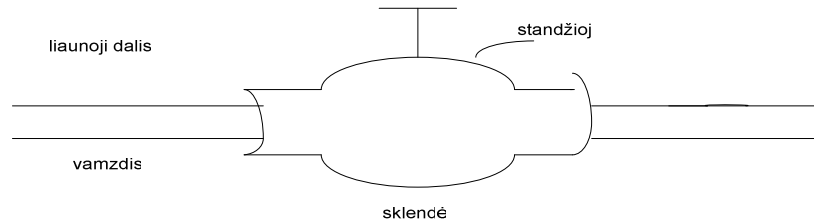
$$u_1 = u_2 = u_3;$$

u_1 – mazgas šeimininkas (master)

u_2, u_3 – mazgai – vergai (slaves)

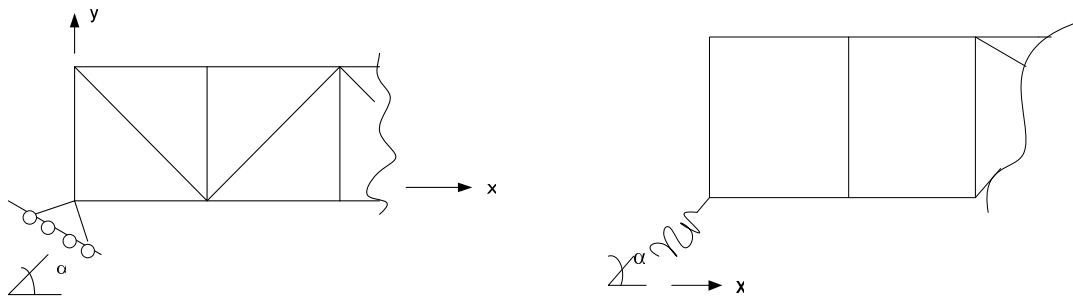
- tinkamai modeliuoti jėgas (ar atvirkščiai – pagal jėgas patikrinti b.e. tipą). Pavyzdžiui tempiamiems / gniuždomiems strypams (truss) negalimos lenkimo apkrovos; tam reikia lenkiamų strypų (beam). Jėgos - tik mazguose pridedamos.

- Tinkamai įvertinti santykinai standžias struktūros (konstrukcijos) dalis. Pavyzdys:



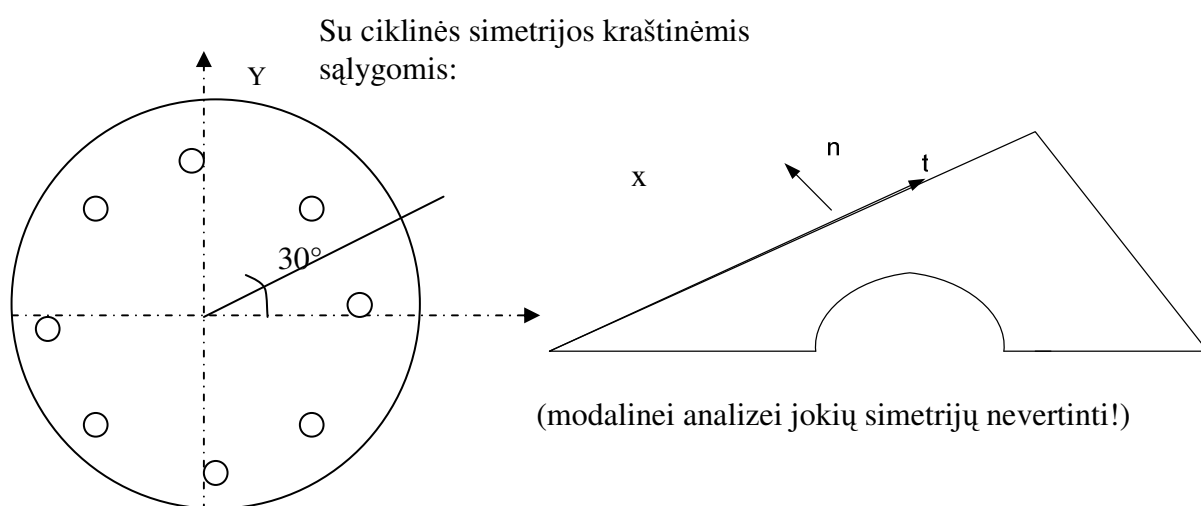
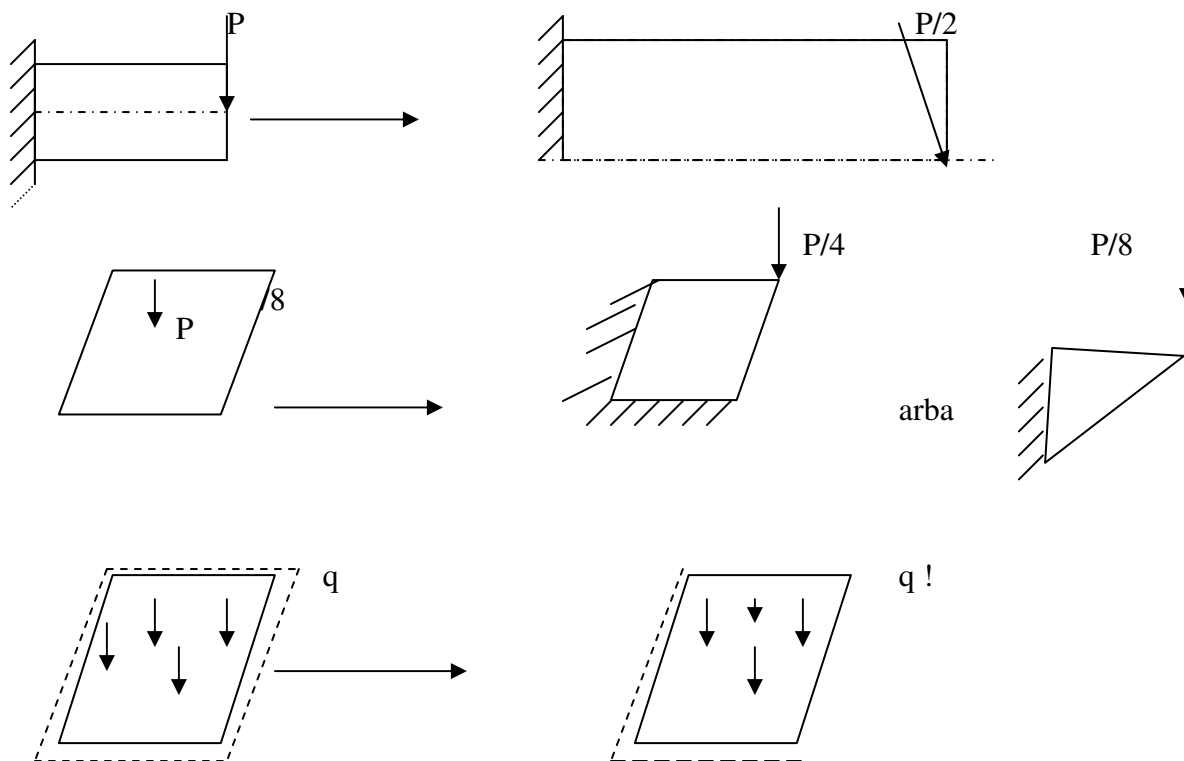
Reikėtų modeliuoti dviem etapais:

1. Modeliuoti visą struktūrą su grubiu b.e. tinklu ir nustatyti maksimalų struktūros standį ($= [k]$ diagonalinis elementas) k_{max} . Imti silpnesniosios medžiagos $E - E_{min}$ (silpnesniojo skerspjūvio $I_{min}, \dots$).
 2. Modeliuoti silpnąsias dalis imant $E_{min} (I_{min}, \dots)$, o standžiosioms – tokį $E (I)$, kad skirtumai standžių būtų $\sim 4-5$ kartai.
- tinkamai įvertinti kraštinės sąlygas ne globaliųjų koordinačių ašių kryptimis. Pavyzdys:



Spyruoklės standis turėtų būti intervale ($4 k_{max}, 5 k_{max}$).

- jei galima (tinkama geometrija, medžiaga, kraštinės sąlygos), įvertinti struktūros simetriją
Pavyzdžiai:

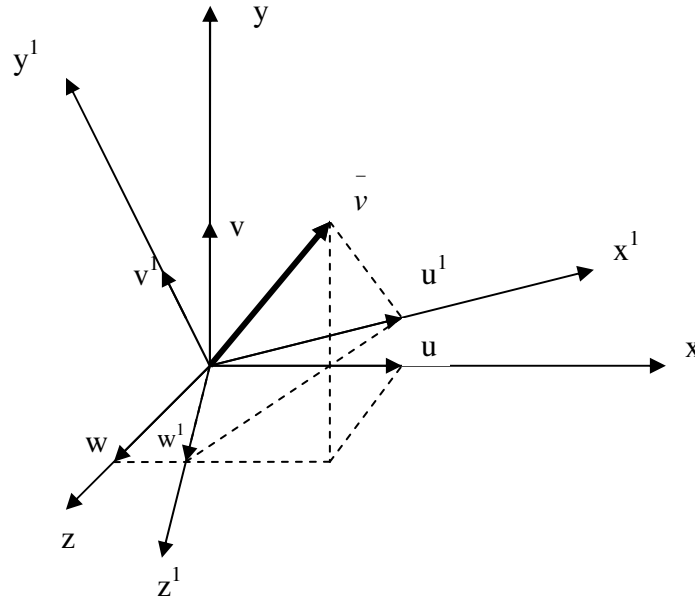


- įtempimų analizei būtinas smulkesnis b.e. tinklas nei poslinkių analizei;
- ~ kuo daugiau l.l. mazgas turi, tuo b.e. tinklas turi būti smulkesnis (palyginti: plokščiojo įtempimų būvio b.e. – 2 l.l.mazge su lenkiamų plokštelių b.e. – 5 l.l. mazge).

13. KOORDINAČIŲ TRANSFORMAVIMAS IR JO VEDINIAI

Vektorių transformavimas

Vektoriai : pozicijos, poslinkių, jėgų, mažų posūkių, momentų.



$\bar{v}$ komponentas, pavyzdžiui:

$u' = \lambda_{x'x} u + \lambda_{x'y} v + \lambda_{x'z} w$ – suma u, v, w projekcijų į x' ; $\lambda_{x'x}$ - krypties kosinusas kampo tarp ašių x' ir x ,

...

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = [\lambda] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Matrica $[\lambda]$:

- ortogonalė, t.y. $[\lambda]^{-1} = [\lambda]^T$
- gali būti stačiakampė
- gali sieti ne vien dekartines koordinates

Taigi,

$$\{u'\} = [\lambda] \{u\} \quad \text{ir} \quad \{u\} = [\lambda]^T \{u'\}$$

...

$$\{M'\} = [\lambda] \{M\} \quad \text{ir} \quad \{M\} = [\lambda]^T \{M'\}$$

Bendruoju atveju $[\lambda]$ yra nebūtinai ortogonalė ir stačiakampė, tačiau vis tiek

$$\{u\} = [\lambda]^T \{u'\}.$$

Įrodymas: tegu šiuos poslinkius atlieka jėgos $\{f\}$, $\{f'\}$. Virtualių poslinkių principu suteikiama poslinkių variacija: $\{\delta u\}$, $\{\delta u'\}$; $\{\delta u'\} = [\lambda] \{\delta u\}$.

Tos pačios jėgos darbas virtualiuose poslinkiuose yra lygus:

$$\begin{aligned} \{\delta u\}^T \{f\} &= \{\delta u'\}^T \{f'\} = \{\delta u\}^T [\lambda]^T \{f'\}, \\ \{f\} &= [\lambda]^T \{f'\}. \end{aligned}$$

Deformacijų, įtempimų, medžiagos savybių transformavimas

Deformacijos

$$\varepsilon_x \sim u, x, \dots$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \lambda_{x'x} \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{x'y} \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda_{x'z} \frac{\partial u}{\partial z}; \quad (\text{iš (1)})$$

...

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x'} &= \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x'} \frac{\partial u}{\partial z} \\ &\quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel \\ &\quad \lambda_{x'x} \quad \lambda_{x'y} \quad \lambda_{x'z} \end{aligned}$$

...

Visoms galimoms 9 – ioms išvestinėms:

$$\begin{aligned} \{u', x', u', y', u', z', \dots, w', z'\}^T &= \begin{bmatrix} \lambda_{x'x}[\lambda] & \lambda_{x'y}[\lambda] & \lambda_{x'z}[\lambda] \\ \lambda_{y'x}[\lambda] & \lambda_{y'y}[\lambda] & \lambda_{y'z}[\lambda] \\ \lambda_{z'x}[\lambda] & \lambda_{z'y}[\lambda] & \lambda_{z'z}[\lambda] \end{bmatrix} * \{u, x, u, y, u, z, \dots, w, z\}^T \\ &= l \quad = m \quad = n \end{aligned} \quad (2)$$

Iš (2) išrenkami reikiami nariai ir sudėliojami taip, kaip reikalauja Cauchy lygtys. Rezultatas pateikiamas formoje:

$$\{\varepsilon'\} = [T_\varepsilon] \{\varepsilon\}, \quad (3)$$

$$[T_\varepsilon] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ \hline 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{array} \right],$$

Čia deformacijų tvarka: $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \varphi_{xy} \ \varphi_{yz} \ \varphi_{zx}\}^T$

Įtempimai

Iš virtualaus vidinių jėgų darbo tūrio vienetui, atliekamo virtualiame poslinkyje: tų pačių įtempimų darbas bet kurioje koordinačių sistemoje turi būti vienodas.

$$\begin{aligned} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} &= \{\delta\varepsilon'\}^T \{\sigma'\} = < \text{iš (3)} > = \{\delta\varepsilon\}^T [T_\varepsilon]^T \{\sigma'\} \\ \{\sigma\} &= [T_\varepsilon]^T \{\sigma'\} \end{aligned} \quad (4)$$

Įtempimų tvarka:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^T$$

Iš (4):

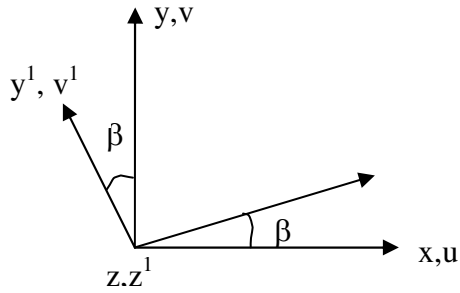
$$\{\sigma'\} = [T_\varepsilon]^{-T} \{\sigma\}$$

Dėl $[T_\varepsilon]^{-T}$: tegu (3) lygtyje esančios $[T_\varepsilon]$ dalys yra $T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}$

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix},$$

$$[T_\varepsilon]^{-T} = \begin{bmatrix} T_{11} & 2T_{12} \\ \frac{1}{2}T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}.$$

Atskiras atvejis: transformavimas 2D plokštumoje:



$$[\lambda] = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x' & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ y' & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ z' & 0 & 0 & 1 \end{array}; \quad [T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}; \quad [T_\varepsilon]^{-T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

Medžiagos savybės:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad \text{ir} \quad \{\sigma'\} = [D']\{\varepsilon'\};$$

iš (3), (4):

$$\{\sigma\} = [T]^T \{\sigma'\} = [T_\varepsilon]^T [D']\{\varepsilon'\} = [T_\varepsilon]^T [D'] [T_\varepsilon] \{\varepsilon\} \quad (5)$$

Iš (1, 2, 3, 4, 5) natūraliai seka:

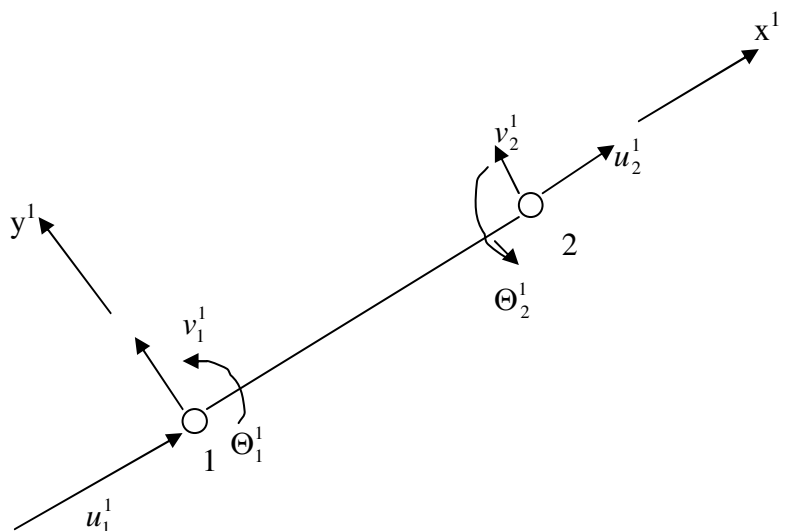
$$[K]^e = [T]^T [K']^e [T]$$

$$[M]^e = [T]^T [M']^e [T]$$

$$[C]^e = [T]^T [C']^e [T]$$

Standumo matricos transformavimo pavyzdys: lenkiamo strypo elementas.

Lokalinėse koordinatėse:

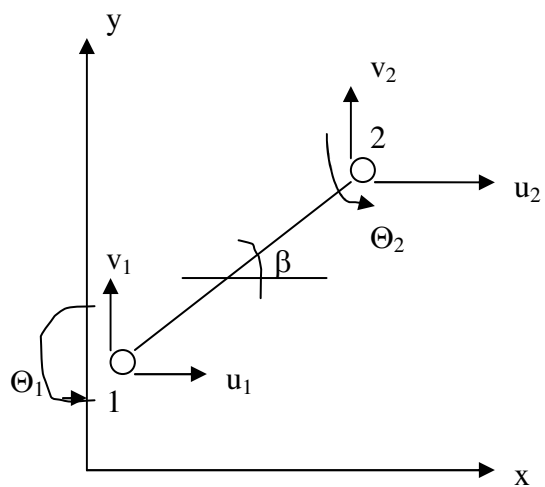


$$\{ u_m^1 \} = \{ u_1^1 \ v_1^1 \ \Theta_1^1 \ u_2^1 \ v_2^1 \ \Theta_2^1 \}^T$$

$[K']$ yra superpozicija tempiamo-gniuždomo strypo (1 l.l.– u) ir grynai lenkiamo strypo (l.l.: v ir Θ).

$$[K'] = \begin{bmatrix} Z & 0 & 0 & -Z & 0 & 0 \\ 0 & K & M & 0 & -K & M \\ 0 & M & A & 0 & -M & B \\ \hline -Z & 0 & 0 & Z & 0 & 0 \\ 0 & -K & -M & 0 & K & -M \\ 0 & M & B & 0 & -M & A \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} Z &= AE / L \\ A &= 4EI / L \\ B &= 2EI / L \\ K &= 12EI / L^3 \\ M &= 6EI / L^2 \end{aligned}$$



$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & 0 \\ 0 & [t] \end{bmatrix}, \quad [t] = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$6 \times 6 \quad 3 \times 3$$

$$[K] = \begin{bmatrix} F & G & H & -F & -G & H \\ G & P & Q & -G & -P & Q \\ H & Q & A & -H & -Q & B \\ -F & -G & -H & F & G & -H \\ -G & -P & -Q & G & P & -Q \\ H & Q & B & -H & -Q & A \end{bmatrix},$$

$$F = 2c^2 + Ks^2$$

$$G = (2 - K)cs$$

$$P = Zs^2 + Kc^2$$

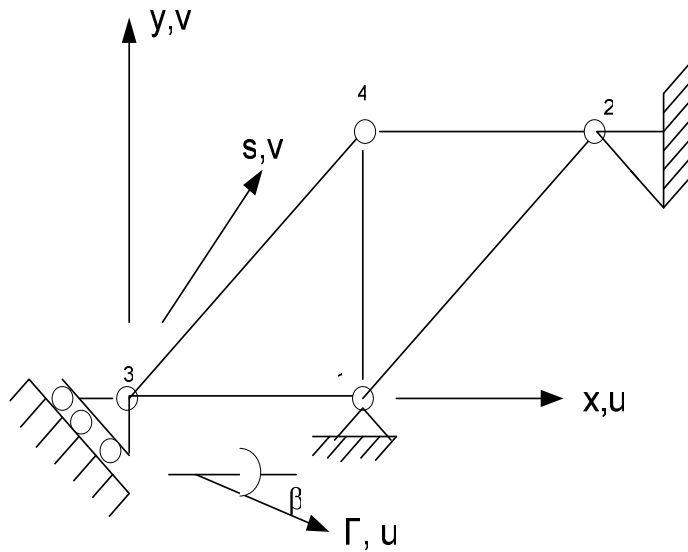
$$H = -Ms$$

$$Q = Mc$$

TRANSFORMAVIMO VEDINIAI

Nuožulnūs įtvirtinimai

Pavyzdys:



Vienas iš galimų 3-io mazgo įtvirtinimo būdų: laikyti, kad $v_3 = -u_3 \operatorname{tg} \beta$

Paprasčiausia: uždrausti v_3 poslinkį.

Taigi, prieš kraštinių sąlygų įvedimą:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & 0 & K_{24} \\ K_{31} & 0 & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $2 \times 2 \qquad \qquad 2 \times 1 \qquad \qquad 2 \times 1$

$$\{D_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \qquad \{F_i\} = \{....\}$$

arba, lenkiamų strypų atveju,

$$\{D_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \Theta_i \end{Bmatrix}$$

Mazgo 3 poslinkius u, v transformuojame į U, V :

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [T_3] \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad \text{arba} \quad \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = [T_3] \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix},$$

$$[T_3] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad [T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Patogiausia taikyti procedūrą visai matricai $[K]$ ir jėgų vektoriui $\{F\}$; kitų mazgų netransformuosime, todėl

$$[T] = [I \ I \ T_3 \ I]$$

$$[T]^T [K] [T] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13}T_3 & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & 0 & K_{24} \\ T_3^T K_{31} & 0 & T_3^T K_{33}T_3 & T_3^T K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43}T_3 & K_{44} \end{bmatrix}, \quad [T_3]^T \{F_3\}$$

Šioje matricoje įvedama kraštinė sąlyga poslinkiui V_3 .

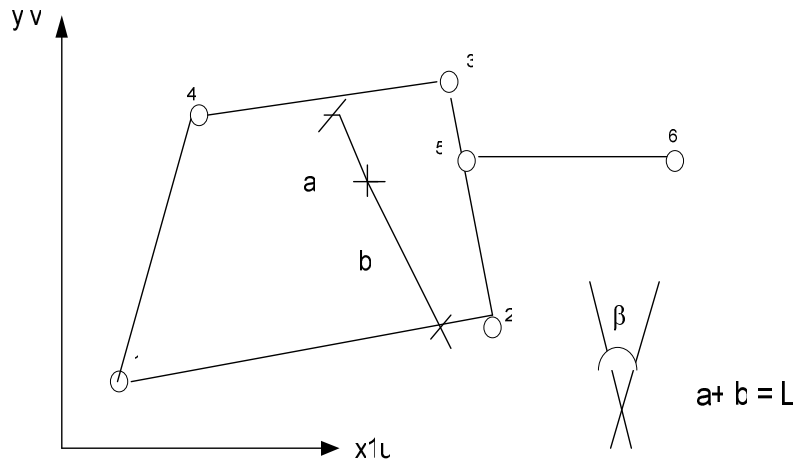
Jei yra ir kitų nuožulnių įtvirtinimų, paeiliui atliekamos panašios transformacijos:

$$\{D^u\} = [T_u][T_{u-1}] \dots [T_1] \{D\}$$

Sprendiniai – poslinkiai – bus gauti tokiose transformuotose koordinatėse.

Skirtingų elementų sujungimas į ansamblį

Pavyzdys:



Tegu lenkiamas strypas 5-6 prijungiamas prie tempiamo-gniuždomo strypo 2-3 viduryje kraštinės, arba prie keturkampio elemento 1-2-3-4 briaunos.

Lenkiamam strypui:

$$\{u'\}^e = \{u_5 \quad v_5 \quad \Theta_5 \quad u_6 \quad v_6 \quad \Theta_6\}^T,$$

$$[K']^e \{u'\}^e = \{f'\}^e$$

Turime gauti:

$$[K]^e = [T]^T [K']^e [T], \quad \text{kur } \{u\}^e = \{u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_6 \quad v_6 \quad \Theta_6\}^T$$

$$\{f\}^e = [T]^T \{f'\}^e$$

[T] galima taip parinkti, kad 5-ojo mazgo poslinkiai būtų mazgų 2 ir 3 poslinkių tiesinė interpolacija; 5-ojo mazgo posūkis būtų toks kaip strypo 2-3 posūkis:

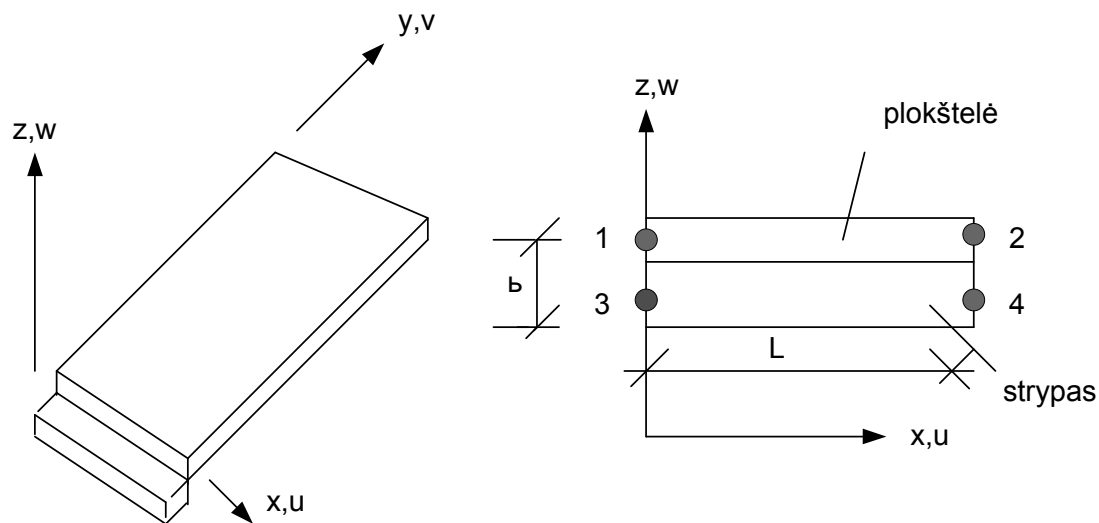
$$[T] = \begin{bmatrix} T_3 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad [T_3] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & s & -c & -s \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} c = \cos \beta \\ s = \sin \beta \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 6 \times 7 & 3 \times 4 & 3 \times 3 \end{matrix}$$

[K] bus gauta 7×7 .

Standūs ryšiai

Pavyzdys:



Jei plokštelės elementai nagrinėjami 3D erdvėje, mazgo l.l. yra

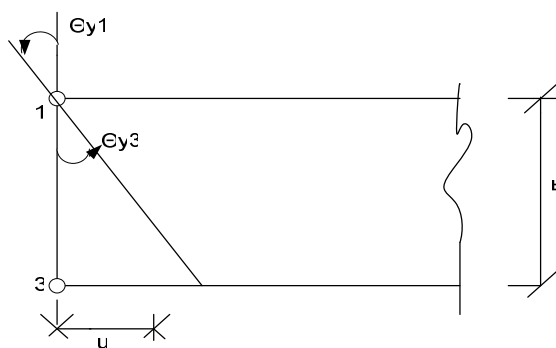
$$u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y \quad (\theta_z)$$

Strypo mazgai turi l.l. $u \quad w \quad \theta_y$

Prijungiant strypo elementą 3-4 prie plokštelės mazgų 1-2, ansamblyje l.l. $u_3 \quad w_3 \quad \theta_{y3} \quad u_4 \quad w_4 \quad \theta_{y4}$ neturi likti.

Akivaizdu:

- strypo standumas w kryptimi turi prisidėti prie plokštelės atitinkamo standumo;
- strypo standumas posūkiui θ taip pat prisideda;
- dėl standumo poslinkio u kryptimi:



Teigiamas Θ_{y1} iššaukia teigiamą $u' = tg \Theta_{y1} b \approx \Theta_{y1} b$

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \Theta_{y3} \end{Bmatrix} = [T_3] \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \Theta_{y1} \end{Bmatrix}, \quad [T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogiškai transformuojami poslinkiai 4-am mazgui.

Visam strypui

$$\{f\}^e = [T]^T \{f'\}$$

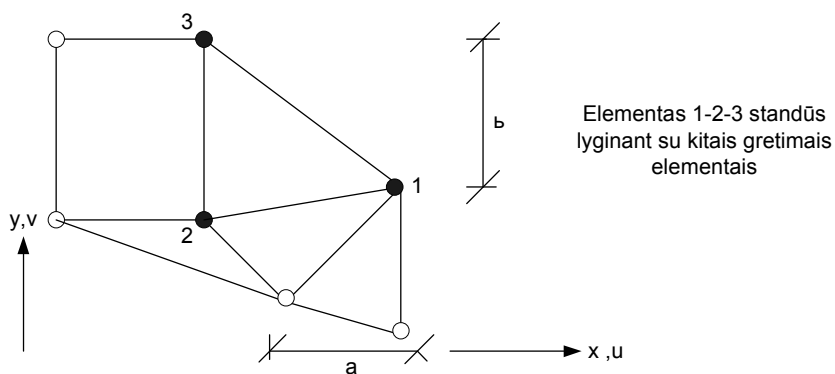
$$[K]^e = [T]^T [K']^e [T], \quad [T] = \begin{bmatrix} [T_3] & 0 \\ 0 & [T_4] \end{bmatrix}$$

Matricų elementai pridedami prie globalių matricų mazgų 1 ir 2 l.l.

Mazgai kaip 3 ir 4 vadinami “slave nodes”, o 1 ir 2 – “master nodes”

Standūs elementai

Pavyzdys:



Labai standus vienas elementas sąlygos atitinkamus labai didelius $[K]^a$ elementus $\gg$ už kitus elementus. Tikėtinas skaitmeninių apvalinimo paklaidų augimas. Geriau elementą laikyti absoliučiai standžiu.

Jei 1-2-3 elementas visiškai standus, jo poslinkiams charakterizuoti užtenka 3-jų poslinkių, pavyzdžiui, u_1, v_1, u_2 . Kiti poslinkiai su šiais susiejami:

$$\{d'\} = [T]\{d\},$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a/b & 1 & a/b \\ 1 & 0 & 0 \\ -a/b & 1 & a/b \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

- poslinkiai v_2, u_3, v_3 toliau nebefigūruoja.