UŽDAVINYS

Nustatyti struktūros reakciją į poveikius.

Struktūra: kūnas arba vientisa terpė, į kurių mikrostruktūrą galima nesigilinti. Pavyzdžiui: kietas kūnas (3D, 2D, 1D), skystis, dujos.

Poveikiai: mechaninės jėgos, inercijos jėgos, gravitacija, temperatūrinis laukas, koncentracija,…

Nustatomi dydžiai: poslinkiai, įtempimai, koncentracija, greičiai, elektromagnetiniai potencialai, akustiniai slėgiai,…

Uždavinio formulavimas ("stiprus"):

$\boldsymbol{Du - f = 0} \in \boldsymbol{v}$

$+$ kraštinės sąlygos

$\boldsymbol{Bu - g = 0} \in \boldsymbol{S}$

$\boldsymbol{u}$ – ieškoma skaliarinė (vektorinė) funkcija
$\boldsymbol{D, B}$ – diferencialiniai operatoriai
$\boldsymbol{f, g}$ – žinomos skaliarinės (vektorinės) nepriklausomų dydžių funkcijos; konstantos

Kraštinės sąlygos: *esminės* ir *neesminės*. Jei $\boldsymbol{D}$ yra išvestinės iki $2m$ eilės, tai esminės sąlygos įvedamos nežinomųjų išvestinėms nuo 0 iki $m - 1$ eilės; neesminės – nuo m iki $2m - 1$ eilės.

Uždavinio formulavimas ("silpnas"):

$$\boldsymbol{X = \int_v f'(u, u_{,x}, \ldots)dv + \int_s g'(u, u_{,x}, \ldots)ds \rightarrow min} \quad \text{(leistinose konfigūracijose)}$$

$+$

$(\boldsymbol{Bu - g = 0} \in \boldsymbol{S})$

Iš "silpnos" formuluotės visada Eulerio teorema galima pereiti į " stiprią" formuluotę. Atvirkščias pertvarkymas galimas ne visada, kai kurie uždaviniai (skysčių mechanikos) neturi funkcionalų.

Skaičiavimo metodai:
Tikslūs:
Integravimas atskiriant kintamuosius
Fourier ir Laplace transformacijos
Apytiksliai:
Tikimybiniai metodai (Monte Carlo)
Rayleigh – Ritz metodas
Liekamųjų neatitikčių metodai (weighted residuals)
<u>Baigtinių elementų metodas</u>
Kraštinių elementų metodas
Baigtinių skirtumų metodas

BAIGTINIŲ ELEMENTŲ METODAS (BEM)

Vyraujantis artutinis skaičiavimo metodas mechanikos inžinerijoje, statybos inžinerijoje, skysčių mechanikoje, dispersijos uždaviniuose ir labai įvairiuose susietuosiuose uždaviniuose.

Kodėl metodas populiarus:

- labai aiški metodo fizinė interpretacija,
- yra keliolika komercinių universalių programų įvairioms techninėms aplikacijoms.

Metodo trūkumai:

- metodo rezultatai netinkami analitinei analizei; visad gaunamas rezultatas tik konkrečiam uždaviniui,
- reikia daug žinoti: apie uždavinio formulavimą, kraštines sąlygas, atskirus baigtinius elementus,
- būtinas kompiuteris ir programa,
- būtina patirtis ir inžinerinė nuovoka diskretiniam modeliui sudaryti,
- programos lydimos labai plačia dokumentacija; ją būtina perskaityti,
- reikia labai daug duomenų, gaunama labai daug rezultatų.

Metodo lygčių išvedimas:

- tiesioginiu metodu – tiesiog iš fizikos lygčių; labai paprastiems uždaviniams,
- liekamųjų neatitikčių metodais (weighted residuals), nagrinėjant elementarias kūno (terpės) dalis – uždaviniams, aprašomiems dif. lygtimis,
- variaciniais metodais, nagrinėjant tam tikras sumines viso kūno (terpės) charakteristikas – uždaviniams, turintiems funkcionalus.

Metodo esmė:

perėjimas nuo begalinio laisvumo laipsnių (l.l.) kiekio prie baigtinio, sudalinant sritis V ir S į baigtinius elementus (b.e.) ir parenkant juose a priori nežinomos funkcijos kitimo dėsnį.

Istorija:

- R. Courant 1943m.: trikampiai b.e., potencinės energijos minimumo principas, St.Venant'o sukimo uždavinys,
- J. Greenstadt 1959m.: fizinė interpretacija, sritis sudalinama į "celes",
- 1960 – aisiais metais: platūs inžineriniai taikymai; pirmieji sėkmingi metodo taikymai – kietojo deformuojamo kūno mechanikoje. J. Argyris, B. Irons, R. W. Clough, O.-C. Zienkiewicz, Kl.-J. Bathe,
- "aukso amžius" – 1980 – ieji metai.

Dabartinė būklė ir perspektyvos:

- bibliografija – virš 30000 publikacijų, virš 400 knygų, apie 250 tarptautinių konferencijų, simpoziumų.
- likę problemos: irimo mechanikoje, mikroanalizėje; susietuosiuose kietojo kūno ir kitų fizinių terpių uždaviniuose; skaičiuojamojoje skysčių mechanikoje.

“Reference literature”:

O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. The Finite Element Method. 2005. 6th ed., vol.1, 2.

T. J. R. Hughes. The Finite Element Method. 1988.

R. C. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. 1989. 3rd ed.

Programos:

ABAQUS, ALGOR, ANSYS, NASTRAN.

1. BENDROS ŽINIOS

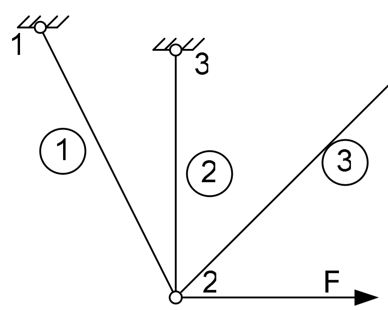
1.1 METODO LYGČIŲ IŠVEDIMAS TIESIOGINIU BŪDU. BEM DISKRETINĖMS STRUKTŪROMS

Strypinės sistemos. Sprendimas žinomas apie 100 metų. Panašios į b.e. sistemas: sudarytos iš identiškų elementų – strypų; šie sujungiami tik mazguose. Abiems sistemoms taikomi tie patys fundamentalūs dėsniai, ta pati skaičiuojamoji procedūra.

Uždavinys ir prielaidos:

- statika
- maži poslinkai/deformacijos
- tiesiškai tampri medžiaga
- duomenys: geometrija, skerspjūviai, medžiagos charakteristikos, apkrova, kraštinės sąlygos
- rezultatai: poslinkiai, įtempimai (arba įrąžos)

Tipiška strypinė sistema:

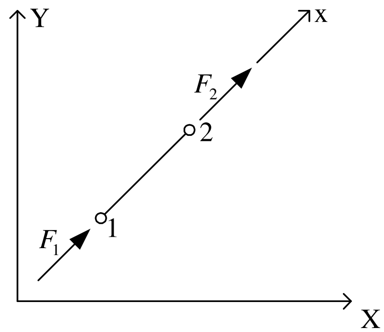


Skaičiavimo procedūra: kiekviename mazge patenkinti vidinių ir išorinių jėgų pusiausvyrą. Išorinės jėgos: F - 2 – ame mazge. Vidinės: kiekviename strype kylančios tempimo/gniuždymo jėgos. Joms rasti nagrinėjami atskiri elementai – strypai.

Pirmasis etapas – **struktūros** sudalinimas į atskirus strypus – b.e. – **diskretizavimas**. Sunumeruojame mazgus; tegu 1-as strypas bus tarp mazgų 1-2, 2-as – tarp 3-2, 3-ias – tarp 4-2. Tai – *ryšių* informacija.

Antrasis etapas – **suskaičiuoti visų b.e. charakteristikas** (standumo matricas, jėgų vektorius) vieningoje, **globaliojoje koordinačių sistemoje**. Elemento standumo matricos formulės strypinėms sistemoms išvedamos tiesiogiai iš fizikos lygčių tokiu būdu:

Atskiras elementas bendru atveju:



Čia:

1, 2 – mazgų lokaliniai numeriai,
X, Y – globalinė koordinačių sistema,
x – lokalinė koordinačių sistema,
F1, F2 – jėgos, įvertinančios atmestųjų strypų įtaką nagrinėjamam strypui.

Elemento charakteringų matricų (standumo matricos) išvedimas tiesioginiu būdu

Vidinės jėgos F_1, F_2 paslinks mazgus per u_1, u_2 koordinatės x kryptimi.

Elemento deformacija bus $\varepsilon = \dfrac{u_2 - u_1}{l}$.

Įtempimai elemente bus $\sigma = \varepsilon E$.

Elemente kils jėga $F_2 = -F_1 = \sigma A = \dfrac{AE}{l}\left(u_2 - u_1\right)$ arba

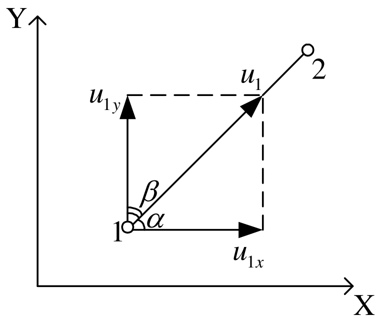
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{arba}$$

$$\{F\}_l = [K]_l \, \{u\}_l \tag{1.1}$$

$[K]_1$ – lokalinė standumo matrica. Fizinė matricos prasmė – ryšio tarp elemento mazgų charakteristika.

Tokiu būdu **suskaičiuojamos visų elementų standumo matricos**.

Globalioji koordinačių sistema. Kad rastume globalius struktūros poslinkius $\{ u \}_g$:



Projekcijų suma į lokalinę x ašį

$$u_1 = u_{1x} \cos\alpha + u_{1y} \cos\beta$$
$$u_2 = \ldots$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{Bmatrix}$$ arba

$$\{u\}_l = [T]\{u\}_g$$

Iš (1):

$$\{F\}_l = [K]_l\,[T]\,\{u\}_g \qquad (1.2)$$

Lygtis (2) toliau bus taikoma lokalioms įrąžoms iš globaliųjų poslinkių gauti.

Sulyginame vidines ir išorines jėgas; tam vidines jėgas – įrąžas transformuojame į globalinę koordinačių sistemą:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \cos\beta & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$ arba

$$\{F\}_g = [T]^T \{F\}_l \qquad (1.3)$$

(2) į (3):

$$\{F\}_g = [T]^T [K]_l\, [T]\, \{u\}_g \qquad (1.4)$$

arba

$$\{F\}_g = [K]_g\, \{u\}_g, \quad \text{kur} \quad [K]_g = [T]^T [K]_l\, [T] \qquad (1.5)$$

Transformacijos matrica $[T]$ užrašoma *transformacijai globalinių poslinkių į lokalinius.* **Tokiu būdu suskaičiuojamos $[K]_g$ visiems elementams.**

Sujungiame elementus į ansamblį. Sujungiant kiekvieno elemento vidinės jėgos $\{F\}_g$ prisideda prie globalinio mazgo, su kuriuo jungiamas elementas.

Prie mazgų pridėtos ir išorinės jėgos.

Pusiausvyra visam ansambliui (e – išorinėms struktūros atžvilgiu jėgoms žymėti, i – vidinėms):

$$\{F^e\} = \{F^i\} = [K]\ \{u\} \tag{1.6}$$

arba – pagrindinė statikos lygtis -

$$\{F^e\} = [K]\ \{u\} \tag{1.7}$$

Taigi, kol kas nenagrinėsim vidinių jėgų; pirminiai nežinomieji – poslinkiai $\{u\}$ globalinių ašių kryptimi. Antrinius nežinomuosius – vidines jėgas – vėliau skaičiuosim pagal (2).

Procedūra [K] sudarymui: kaip iš $[K]_g^{elementų}$ suformuoti $[K]_g^{ansamblio}$?
$\{F^e\}_g^{ansamblio}$ iš $\{F\}_g^{elementų}$?

Sąlygiškai pažymėkim elementų standumo matricas tokiais simboliais:

1-as elementas
(1–2) mazgai

u_{1x}	u_{1y}	u_{2x}	u_{2y}	
x	x	x	x	u_{1x}
x	x	x	x	u_{1y}
x	x	x	x	u_{2x}
x	x	x	x	u_{2y}

2-as elementas
(3–2) mazgai

u_{3x}	u_{3y}	u_{2x}	u_{2y}	
0	0	0	0	u_{3x}
0	0	0	0	u_{3y}
0	0	0	0	u_{2x}
0	0	0	0	u_{2y}

3-ias elementas
(4–2) mazgai

u_{4x}	u_{4y}	u_{2x}	u_{2y}	
•	•	•	•	u_{4x}
•	•	•	•	u_{4y}
•	•	•	•	u_{2x}
•	•	•	•	u_{2y}

Ansamblio standumo matrica:

u_{1x} u_1	u_{1y} u_2	u_{2x} u_3	u_{2y} u_4	u_{3x} u_5	u_{3y} u_6	u_{4x} u_7	u_{4y} u_8	
x	**x**	**x**	**x**					u_{1x}
x	**x**	**x**	**x**					u_{1y}
x	**x**	**x0•**	**x0•**	**0**	**0**	•	•	u_{2x}
x	**x**	**x0•**	**x0•**	**0**	**0**	•	•	u_{2y}
		0	**0**	**0**	**0**			u_{3x}
		0	**0**	**0**	**0**			u_{3y}
		•	•			•	•	u_{4x}
		•	•			•	•	u_{4y}

Poslinkiai:

u_1
u_2
u_3
u_4
u_5
u_6
u_7
u_8

Išorinės jėgos:

0
0
F
0
0
0
0
0

arba

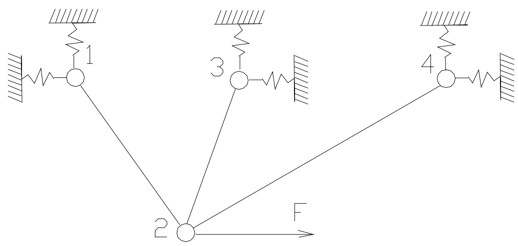
$$[K]\ \{u\} = \{F^e\}$$

Kraštinių sąlygų įvertinimas. Be jų – singuliari standumo matrica. 1, 3, 4 mazgai nejuda – 1, 2, 5, 6, 7, 8 l.l. turi būti fiksuoti. Sąlygos įvedamos tokiais būdais:

1. Tikslus. Iš (7) lygties pašalinamos eilutės 1, 2, 5, 6, 7, 8 ir (iš [*K*]) stulpeliai 1, 2, 5, 6, 7, 8. Trūkumai: programavimo ir atminties problemos; patogiausia iškart formuoti sumažintas matricas.

2. Tikslus. Šalinamam l.l. – iui $[K]$ diagonalinis elementas → "1", o visi kiti šios eilutės ir šio stulpelio elementai → "0". Atitinkamas $\{F^e\}$ elementas → "0". Taigi: išsaugomas tas pats matricos rangas, o sprendinys šiam l.l. – iui bus "0".

3. Apytikslis (= "boundary elements"). Ryšiai tarp 1, 3, 4 mazgų ir pagrindo pakeičiami standžiomis spyruoklėmis:



Parinkus $k_{ii}^{spyruoklės} >> k_{ij},\ j \neq i$ apytiksliai turėsim lygtį $k_{ii}\, u_i = F_i$, iš čia

$$u_i = \frac{F_i}{k_{ii}^{spyruoklės}} \approx 0.$$

Šiuo metodu galima suteikti ir norimus poslinkius "*d*":

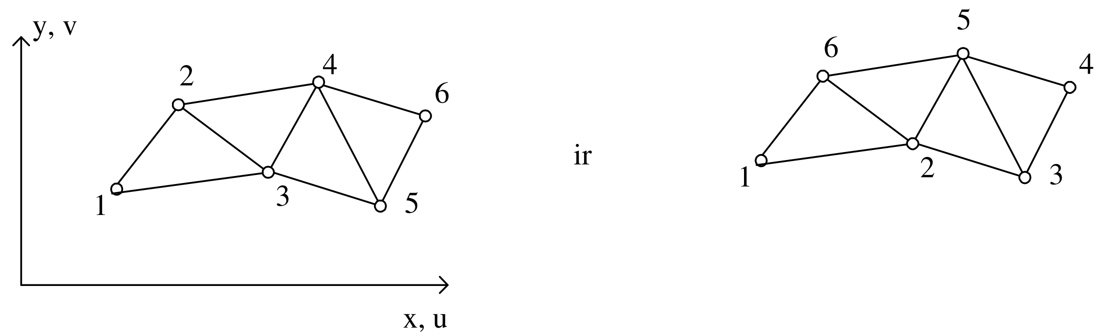
$$F_i \to k_{ii}^{spyruoklės} \cdot d, \quad \text{tada} \quad u_i = \frac{k_{ii}^{spyruoklės} d}{k_{ii}^{spyruoklės}} = d$$

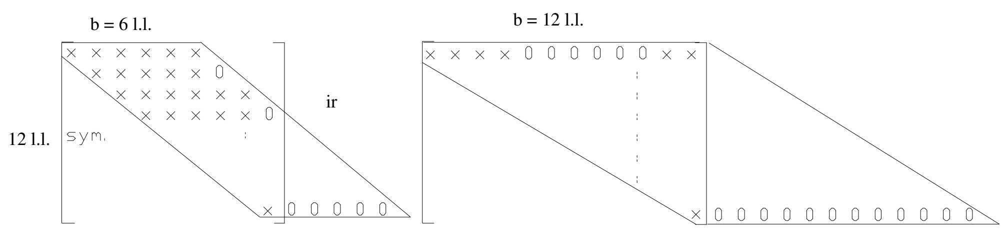
Spyruoklių standumai parinktini pagal naudojamą kompiuterio žodžio ilgį.

Lygčių sistemos sprendimas.

- Gauso metodas
- įvairūs [*K*] saugojimo būdai:
  - juostinis (*banded*)
  - pusjuostė iki nulinių elementų (*skyline matrix*)
  - nenuliniai elementai ir jų indeksai (*sparse matrix*)

Ansamblio su daugeliu l.l. standumo matrica visada turi daug nulinių elementų. Matricos "efektyvumas" priklauso nuo mazgų numeracijos schemos:





[*K*] formą galima keisti skirtingai numeruojant mazgus; nulinių elementų kiekis tačiau nekis.

Kai kurios numeravimo schemos leidžia taupyti kompiuterio resursus:

- saugant atmintyje pilną matricą, reiks n^2 ląstelių
- saugant atmintyje matricą pusjuostės pavidalu - $n \times b$ ląstelių
- saugant atmintyje viršutinį trikampį – $n(n+1)/2$.

Kai struktūra sudėtinga, "rankomis" efektyviai sunumeruoti mazgus sudėtinga. Tam yra specialūs pernumeravimo algoritmai.

Naudojant frontalinius sprendikus, lygtys apdorojamos b.e., o ne mazgų tvarka. Reikia ekonomiškai sunumeruoti b.e.

Vidinių jėgų skaičiavimas.

Iš $\{u\}$ atrenkami kiekvienam elementui priklausantys poslinkiai *$\{u^e\}$* ir pagal (2) randamos vidinės jėgos - įrąžos-įtempimai; dažniausiai lokalinėje koordinačių sistemoje.

Taigi, visa **skaičiavimo procedūra:**

- diskretizacija - sudalinamas į elementus
- $[K]^{elementų}$ skaičiavimas
- $[K]^{ansamblio}$ ir $\{F\}^{ansamblio}$ formavimas
- kraštinių sąlygų įvedimas
- lygčių sistemos sprendimas
- vidinių jėgų (įrąžų, įtempimų) skaičiavimas

Tokios diskretinių struktūrų skaičiavimo procedūros vienintelis skirtumas nuo BEMo - $[K]^{elementų}$ čia skaičiuojamos tiksliai (prielaidų ribose), kai tuo tarpu b.e. - ų $[K]$ skaičiuojamos apytiksliai.

KITŲ UŽDAVINIŲ PAVYZDŽIAI

Vienmatis šilumos perdavimas - **"šiluminis strypas"**. Fourier šilumos perdavimo lygtis:

$$q = -k\frac{dT}{ds} = -k\frac{T_j - T_i}{l} \qquad (1.6)$$

q - šilumos srautas ploto vienetas. Teigiamas, jei eina į elementą.
k - šilumos perdavimo koeficientas;
T - temperatūra;
s - koordinatė strypo ašies kryptimi.

Pastovaus ploto A, ilgio L elementas:

(1.6) pertvarkius:

$$\frac{Ak}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Aq_i \\ Aq_j \end{Bmatrix}$$

Elektros laidininkas - **“strypas - varža”**.
Ohmo dėsnis:

$$I = \frac{V_i - V_j}{r} \qquad (1.7)$$

r - strypo varža
V - įtampa
I - srovė

(1.7) pertvarkius:

$$\frac{1}{r}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_i \\ I_j \end{Bmatrix}$$

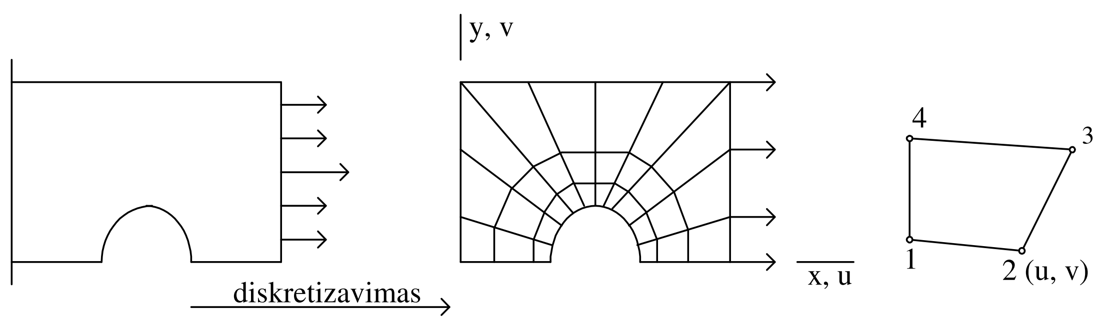
1.2. BEM KONTINUUMO STRUKTŪROMS. METODO LYGČIŲ IŠVEDIMAS

1.2.1. ĮŽANGA

Skaičiavimo procedūra - tokia, kokia aptarta 1.1 skyriuje.

Diskretizavimas. Realus kūnas gali būti sudalintas tik į 3D b.e. Esant ypatingam įtemptam / deformuotam būviui, kai įtempimų ir deformacijų pasiskirstymas 1 ar 2 kryptimis yra iš anksto žinomas - galima atsisakyti 1 ar 2 dimensijų ir diskretizuoti 2D arba 1D b.e. Pranašumai: nežymiai pralaimint tikslumą, žymiai laimimi skaičiavimo resursai.

Pavyzdys: 2D kūnas



Diskretizavimui yra begalė alternatyvų:
- elementų forma
- tinklelio tankis
- interpoliacinio dėsnio eilė.

Tai - lemiamas skaičiuojamosios procedūros etapas. Intuityviai aišku: kur laukiame didelio poslinkio gradiento, ten tinklelis turi būti smulkesnis. Būtinas sprendimas prie kelių skirtingų tinklelių.

Dabar išvystytos ir adaptyvios diskretizavimo technologijos, leidžiančios automatiškai gauti reikiamą tikslumą garantuojantį b.e. tinklelį.

1.2.2. METODO LYGČIŲ IŠVEDIMAS VIRTUALAUS DARBO PRINCIPU

Esminis kontinuumo struktūrų skirtumas nuo diskretinių sistemų $-[K]^{elemento}$ yra apytikslės: a priori b.e. viduje parenkamas nežinomos funkcijos kitimo dėsnis (interpoliacinė, formos, bazinė arba poslinkių funkcija). Visiems tinklelio vieno tipo b.e. tos funkcijos vienodos. Visi b.e. jungiasi vienas su kitu tik mazguose.

Taigi, poslinkiams parenkame formos funkciją. Virtualaus darbo principu bandysime išvesti BEM lygtis. Atskiram b.e. mazgui suteikiamas galimas poslinkis ir jame sulyginamas išorinių ir vidinių jėgų darbas (= deformacijos energijai).

Tegu

$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i u_i \qquad (1.8)$$

Čia:

u - bet kurio taško elemente poslinkis
u_i - mazginis poslinkis
N_i - formos funkcijos komponentas
n - mazgų elemente kiekis

Funkcijai keliame reikalavimus:

- $N_i\,(x_i,\, y_i) = I, \quad N_i\,(x_j,\, y_j) = 0, \quad j \neq i$
- funkcijų klasė – polinomai

Analogiškai parenkamas poslinkio v kitimo dėsnis:

$$v = \sum_{i=1}^{n} N_i v_i$$

Deformacijos

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} \qquad (1.9)$$

(8) įstatome į (9):

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u_m\}, \quad \{u_m\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \; i = 1, 2, 3, 4. \qquad [B] \text{ – geometrinė matrica}$$

Įtempimai:

$$\varepsilon_x = \left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)/\,E$$
$$\varepsilon_y = \left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)/\,E \qquad \text{arba} \qquad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D]\;[B]\{u_m\}$$
$$\varepsilon_{xy} = 2(1+\nu)\sigma_{xy}/E \qquad [D] \text{ – tamprumo matrica}$$

Galimieji poslinkiai

Gretimus b.e. pakeičiame juos atstojančiomis mazginėmis jėgomis $\{f_i\}$. Suteikiame b.e. mazgams virtualius poslinkius $\delta\{u_m\}$ ir juose skaičiuojame vidinių jėgų (įtempimų) darbą.

$$\delta \ \{\varepsilon\} = [B]\delta \ \{u_m\},$$

čia $[B]$ nepriklauso nuo variacijos - joje yra tik N_i išvestinės.
Vidinis darbas tūrio vienetui:

$$\delta \ w^* = \delta\{\varepsilon\}^T\{\sigma\} = \delta\left(\{u_m\}^T\right)[B]^T\{\sigma\},$$

čia $\{\sigma\}$ nepriklauso nuo variacijos – galimas poslinkis suteikiamas realiai elemento būklei. Pilnasis elemento vidinių jėgų darbas:

$$\delta \ w_i = \int_v \delta \ w_i^* dv = \delta\{u_m\}^T \int_v [B]^T \{\sigma\} dv$$

Išorinių (elemento atžvilgiu; o kūno atžvilgiu – vidinių) jėgų darbas:

$$\delta \ w_e = \delta\left(\{u_m\}^T\right)\{f_i\}$$

Vidinių ir išorinių jėgų darbas virtualiame poslinkyje turi būti lygus:

$$\delta\left(\{u_m\}^T\right)\{f_i\} = \delta\{u_m\}^T \int_v [B]^T \{\sigma\} dv$$

Lygybė turi būti tenkinama bet kokioms galimųjų poslinkių reikšmėms, taip pat ir vienetinėms:

$$\{f_i\} = \int_v [B]^T \{\sigma\} dv = \int_v [B]^T [D][B]\{u_m\} dv = \int_v [B]^T [D][B] dv \{u_m\} = [K]^e \{u_m\} \quad (1.10)$$

Standumo matricos skaičiavimas pagal (10) – vienintelis kontinualių struktūrų b.e. skirtumas nuo diskretinių b.e. struktūrų Visos kitos skaičiavimo procedūros dalys – tokios, kaip parodyta ansktesniame skyriuje, todėl jų nekartosime.

Kitos įtakos b.e. įtemptam - deformuotam būviui:

- pradiniai įtempimai $\{\sigma_0\}$ (pvz, nuo kristalizacijos)
- pradinės deformacijos $\{\varepsilon_0\}$ (pvz, nuo temperatūros poveikio)
- tūrinės jėgos P (pvz, inercijos, sunkio, …)

Šias įtakas turime įvertinti, skaičiuodami vidinių ir išorinių jėgų darbus.

Fizinis dėsnis dabar:

$$\{\sigma\} = [D]\ (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \tag{1.11}$$

Tūrines jėgas išskaidome į komponentus koordinačių ašių kryptimis: $P \to \{p\}$. Šios jėgos - išorinės b.e. atžvilgiu. Jų variacija b.e. tūrio vienetui

$$\delta\{u\}^T\{p\} = \delta\{u_m\}^T[N]^T\{p\}$$

Pastaba: poslinkiai, iš kurių dauginamos $\{p\}$, yra būtent $\{u\}^T$ - jėgos pridėtos elemento tūryje, ne vien tik mazguose.

Į (10) įrašome (11) ir įvertiname $\{p\}$ variaciją:

$$\{f_i\} = \int_v [B]^T [D]\ [B] dv \{u_m\} + \int_v [B]^T \{\sigma_0\} dv - \int_v [B]^T [D]\ \{\varepsilon_0\} dv - \int_v [N]^T \{p\}\ dv$$

$\downarrow$

"–" ženklas dėl to, kad $\{p\}$ yra išorinės b.e. atžvilgiu jėgos, kaip ir $\{f_i\}$

Čia:

$\int_v [B]^T \{\sigma_0\}\ dv = \{f\}_{\sigma 0}$ - mazginės jėgos nuo pradinių įtempimų

$-\int_v [B]^T [D]\ \{\varepsilon_0\} dv = \{f\}_{\varepsilon 0}$ - mazginės jėgos nuo pradinių deformacijų

$-\int_v [N]^T \{p\}\ dv = \{f\}_p$ - mazginės jėgos nuo tūrinių jėgų

Pereiname prie ansamblio, sulyginame vidines ir išorines (ansambliui) jėgas, atsisakome vidinių jėgų:

$$\{F^i\} = \{F^e\} = [K]\ \{u\},$$

$$[K]\ \{u\} + \{F\}_{\sigma 0} + \{F\}_{\varepsilon 0} + \{F\}_p = \{F^e\} \tag{1.12}$$

– pagrindinė statikos lygtis

Svarbu. Sudarant ansamblį, čia laikytasi prielaidos, kad b.e. ansamblis yra darnus: tiek prieš deformavimą, tiek po jo tarp gretimų b.e. nėra plyšių, gretimi b.e. nepersidengia. Kitaip negalima būtų sulyginti vidinių ir išorinių ansamblio atžvilgiu jėgų.

Šios prielaidos analogas mechanikoje - deformacijų darnos lygtys. Prielaida įgyvendinama BEMe tam tikrais reikalavimais formos funkcijoms.

1.2.3. METODO LYGČIŲ IŠVEDIMAS IŠ FUNKCIONALO VARIACINIU PRINCIPU

Kietajam deformuotajam kūnui, statikai:

Kūnas (ar bet kuri jo dalis – kad ir b.e.) yra stabilioje pusiausvyroje, jei jo pilnoji potencinė energija minimali.

Nagrinėkim elementą (indeksą ^{e} formulėse praleisim):

$P = U - W$

P - pilnoji potencinė energija
U - kūno deformacijos energija
W - išorinių jėgų darbas

$$U = \frac{1}{2}\int_v \{\varepsilon\}^T [D]\ \{\varepsilon\} dv \Rightarrow \frac{1}{2}\int_v \{u_m\}^T [B]^T [D]\ [B]\{u_m\} dv = \frac{1}{2}\{u_m\}\ [K]\ \{u_m\} \qquad (1.13)$$

$\Rightarrow$ **!** atlikus diskretizavimą, parinkus formos funkcijas,…

Iš (13) - [K] savybės: U yra [K] kvadratinė forma; U fiziškai yra teigiamai apibrėžtas dydis, todėl ir [K] yra teigiamai apibrėžta. Taip pat: [D] tampriam kūnui yra simetriška, todėl ir $[K] = \int_v [B]^T [D]\ [B] dv$ yra simetriška. Vyraujantys [K] elementai - diagonaliniai.

$W = \{u_m\}^T \{f_i\}$

Minimumui rasti P išvestinės pagal nepriklausomos dydžius – $\{u_m\}$ prilyginamos 0:

$$\frac{\partial P}{\partial \{u_m\}^T} = \int_v [B]^T [D]\ [B]\ dv\ \{u_m\} - \{f_i\} = 0$$

! neliko $\frac{1}{2}$

Vėl gaunama ta pat pagrindinė statikos lygtis:

$$[K]\{u_m\} - \{f_i\} = 0$$

Kitų skaičiuojamosios procedūros etapų nekartosime.

1.3. ĮVADINĖS ŽINIOS: KONVERGAVIMAS, FORMOS FUNKCIJŲ KOREKTIŠKUMAS, PAKLAIDOS

Konvergavimas:

tikrasis *P* minimumas pasiekiamas tik prie begalinio l.l. skaičiaus, t.y., kai b.e. diametras $\to$ 0. B.e. modelis visad "kietesnis" nei reali struktūra (esant korektiškoms f.f.)

F.f. korektiškumas:

– Pilnumo reikalavimas – interpoliacinis polinomas f.f. išvesti turi būti pilnas. Mechaninė reikalavimo interpretacija:

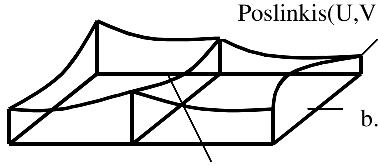
b.e. poslinkio kaip kietojo kūno realizavimas

b.e. pastovios deformacijos būklės realizavimas

geometrinis b.e. invariantiškumas

– Suderinamumo reikalavimas:

Funkcija (t.y. poslinkiai) tarpelementinėje riboje turi sutapti; deformacijos – ne, tačiau privalo būti baigtinės



Yra įvairaus tipo f.f.:

C^0 suderinamumas: kai į $\{\varepsilon\}$ įeina 1 - osios $\{u\}$ išvestinės, o į $\{u_m\}$ – tik pačių funkcijų mazginės vertės – nepertraukiamos tarpelementinėje riboje tada turi būti tik funkcijos $\{u\}$.

Pavyzdžiai: 2D, 3D, simetrinis ašiai įtempimų būviai.

C^1 suderinamumas: kai į $\{\varepsilon\}$ įeina 2 - osios $\{u\}$ išvestinės, o į $\{u_m\}$ – funkcijos ir jų 1 - osios išvestinės – nepertraukiamos turi būti ir funkcijos, ir 1- osios jų išvestinės.

Pavyzdžiai: lenkiamos plokštės, kevalai.

C^2,…

Apibendrintai: jei funkcionale $\Pi=\Pi(\Phi)$ yra Φ išvestinės iki *m* eilės, nepertraukiamos ir suderintos turi būti Φ ir jos išvestinės iki *m - 1* eilės.

Konvergavimo greitis

Sprendinyje yra nariai ~ nuo nežinomo BEM sprendinio. Tegu f.f. - polinominė *p* eilės funkcija; tikslus sprendinys taške (x_i, y_i) b.e. viduje apytiksliai bus:

$$u = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i X + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i Y + \ldots \qquad \left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0) \right)$$

X, Y - b.e. "diametro" *h* projekcijos

Sprendinys sutaps su Tayloro eilute iki atmetamo nario eilės: *p+1* eilės, t.y., konvergavimo eilė yra $O(h^{p+1})$. Deformacijos ir įtempimai išreiškiami per *m* - ąsias funkcijų $\{u\}$ išvestines: konvergavimo eilė $O(h^{p+1-m})$.

Taikymo pavyzdys: plokščiasis įtempimų būvis, f.f. - tiesinis polinomas: *p = 1*, t.y., konvergavimo greitis yra poslinkiams $O(h^2)$, deformacijoms ir įtempimams $O(h)$. Tegu: išsprendėm uždavinį su vienu b.e. tinkleliu, o po to jį reguliariai dvigubai susmulkinome:

$$h_{naujas} = \frac{1}{2} h_{senas}.$$

Turėsim: poslinkių aproksimavimo klaida mažėja iki 0.25 turėtos klaidos; deformacijų ir įtempimų - iki 0.5 turėtos klaidos.

Paklaidų šaltiniai ir klasifikavimas:

modeliavimo (pvz., Kirchhofo b.e. taikymas storai plokštelei modeliuoti)
aproksimavimo (diskretizavimo)
apvalinimo (skaitinio integravimo formuojant [*K*], [*M*], [*C*],…; lygčių sistemos sprendimo,…)