ASIMPTOTINĖS ANALIZĖS PAGRINDAI
Aleksandras Krylovas

Turinys

1 skyrius

Funkcijų asimptotiniai skleidiniai

1.1. Funkcijų palyginimo sąryšiai

1.1.1. Įvadas

1.1 pavyzdys. Diferencialinė lygtis

$$y' + y = x$$

su pradine sąlyga $y(0) = 0$ turi vienintelį sprendinį

$$y(x) = e^{-x} + x - 1,$$

kurį galima išskleisti Teiloro (Makloreno)[1] eilute

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n.$$

Parodykime kaip rasti šią eilutę iš diferencialinės lygties. Turime reiškinį su neapibrėžtais y_j koeficientais:

$$y(x) = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + y_3 x^3 + \cdots$$

[1] B.Taylor, C.Maclaurin

Iš čia gauname

$$y(0) = y_0 + y_1 \cdot 0 + y_2 \cdot 0^2 + y_3 \cdot 0^3 + \cdots = y_0 = 0,$$

$$y'(x) = y_1 + 2y_2x + 3y_3x^2 + \cdots + ny_nx^{n-1} + \cdots$$

Įrašome šiuos reiškinius į diferencialinę lygtį ir grupuojame koeficientus prie vienodu x laipsnių:

$$y_1 + 2y_2x + 3y_3x^2 + \cdots + y_0 + y_1x + y_2x^2 + y_3x^3 + \cdots =$$

$$(y_1 + y_0) + (2y_2 + y_1)\,x + (3y_3 + y_2)\,x^2 + \cdots = x.$$

Taigi $y_0 + y_1 = 0$, $y_1 + 2y_2 = 1$, $y_2 + 3y_3 = 0$ ir bendruoju atveju gauname rekurentinį sąryšį:

$$y_n + (n+1)y_{n+1} = 0,\ n \geqslant 2.$$

Žinodami $y_0 = 0$, gauname $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{2}$, $y_3 = -\frac{1}{6}$, $y_4 = \frac{1}{24}$, $\ldots$, $y_n = -\frac{y_{n-1}}{n} = \frac{(-1)^n}{n!}$. Todėl turime Koši uždavinio sprendinio laipsninę eilutę

$$y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n.$$

Ši eilutė konverguoja $\forall x \in \mathcal{R}$ ir todėl funkcija $y(x)$ yra analizinė.

1.2 pavyzdys.

$$\begin{cases} x^2y' + y = x,\ x > 0 \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Diferencialinės lygties sprendinio ieškome laipsninės eilutės pavidalu

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x^n.$$

Tada

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,y_n x^{n-1}.$$

Keisdami diferencialinėje lygtyje $y(x)$ ir $y'(x)$ šiais reiškiniais, gauname

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,y_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} y_n x^n = x.$$

Iš čia gauname $y_1 = 1$ ir rekurenčiąją lygtį

$$(n-1)\, y_{n-1} + y_n = 0, \quad \text{kai } n > 1.$$

Taigi $y_2 = -y_1 = -1$, $y_3 = -2y_2 = 2$, $y_4 = -3y_3 = -6$, …,

$$y_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Iš čia gauname diverguojančią ($\forall x \neq 0$) eilutę

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n!\, x^n. \tag{1.2}$$

1.1 pratimas. *Parodykite, kad* (1.2) *laipsninė eilutė diverguoja* $\forall x \neq 0$.

Integravimu dalimis galima įrodyti formulę

$$n! = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^n \, dt.$$

Keičiame integravimo ir sumavimo tvarką funkcijos $y(x)$ išraiškoje:

$$y(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int_0^{\infty} e^{-t} t^n \, dt \right) x^n =$$

$$x \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, (tx)^n \; dt.$$

Formaliai taikome geometrinės progresijos sumos formulę $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^n = \dfrac{1}{1+q}$ ir gauname

$$y(x) = x \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}\, dt}{1 + tx}.$$

Teiginys

Funkcija $y(x) = x \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t}\, dt}{1+tx}$, $x \in [0, 1)$ yra (1.1) lygties sprendinys.

Įrodymas. Pažymėkime $I(x) = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t}\, dt}{1+tx}$, t. y. $y(x) = x\, I(x)$. Netiesioginis integralas $I(x)$, $x \in [0, 1)$ absoliučiai konverguoja ir jį galima diferencijuoti pagal x:

$$I'(x) = -\int\limits_0^{\infty} \frac{te^{-t}}{(1 + tx)^2} \, dt.$$

Pastebėkime, kad $(\forall x \geqslant 0)\ |I(x)| \leqslant |I(0)| = 1$. Todėl $y(0) = 0 \cdot I(0) = 0$.

Integruojame dalimis ($\int udv = uv - \int vdu$):

$$I(x) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{1+tx} = -\int\limits_0^\infty \frac{d\,e^{-t}}{1+tx} =$$

$$-\left.\frac{e^{-t}}{1+tx}\right|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \frac{xe^{-t}}{(1+tx)^2}\,dt = 1 - x\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+tx)^2}\,dt.$$

Iš čia gauname $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+tx)^2}\,dt = \frac{1-I(x)}{x}$. Pastebėję, kad $\frac{xt}{(1+tx)^2} = \frac{1}{1+tx} - \frac{1}{(1+tx)^2}$, turime

$$x\int\limits_0^\infty \frac{te^{-t}}{(1+tx)^2}\,dt = -x\,I'(x) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{1+tx} - \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{(1+tx)^2}$$

Arba $-x\,I'(x) = I(x) - \frac{1-I(x)}{x}$ ir $I'(x) = \frac{1}{x^2} - I(x)\frac{1+x}{x^2}$. Įstatome $y(x) = x\,I(x)$, $y'(x) = I(x) + x\,I'(x)$ į (1.1) lygtį:

$$x^2I(x) + x^3I'(x) + x\,I(x) = x^2I(x) + x - xI(x)(1+x) + xI(x) = x.$$

Teiginys įrodytas.

Parodykime, kad diverguojančią (1.2) eilutę galima taikyti apytiksliams skaičiavimams. Pažymėkime

$$I(x;T) = \int\limits_0^T \frac{e^{-t}\,dt}{1+tx}.$$

T. y. $I(x) = \lim\limits_{T\to+\infty} I(x;T)$. Pastebėkime, kad $I(x) - I(x;T) = \int\limits_T^\infty \frac{e^{-t}dt}{1+tx} \leqslant \frac{e^{-T}}{1+Tx}$. Todėl galime įvertinti aproksimacijos $I(x) \approx I(x;T)$ paklaidą, o apibrėžtiniam integralui $I(x;T)$ apskaičiuoti taikome kvadraturines formules. Pavyzdžiui,

$$I(0.5) = 0.72265723377644516939,$$

$$I(0.25) = 0.82538259960422333241,$$

$$I(0.1) = 0.91563333939788081876.$$

Pažymėkime $I_k(x)$ (1.2) eilutės dalines sumas:

$$I_0(x) = 1,\ I_1(x) = 1 - x,\ I_2(x) = 1 - x + 2x^2,\ I_3(x) = 1 - x + 2x^2 - 6x^3,$$

$$I_4(x) = 1 - x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4,\ I_n(x) = I_{n-1}(x) + (-1)^n n! x^n.$$

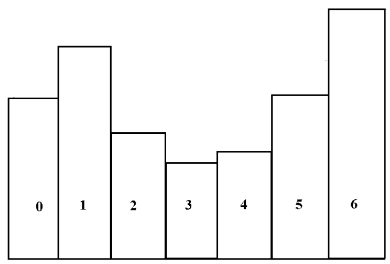
Apskaičiuokime aproksimacijų $I(x) \approx I_n(x)$ paklaidas
$R_n(x) = |I(x) - I_n(x)|$:

$$R_0(0.5) \approx 0.277,\ R_1(0.5) \approx 0.223,\ R_2(0.5) \approx 0.277,\ R_3(0.5) \approx 0.473;$$

$$R_0(0.25) \approx 0.175,\ R_1(0.25) \approx 0.7538 \cdot 10^{-1},\ R_2(0.25) \approx 0.4962 \cdot 10^{-1},$$

$$R_3(0.25) \approx 0.4413 \cdot 10^{-1},\ R_4(0.25) \approx 0.4962 \cdot 10^{-1},$$

$$R_5(0.25) \approx 0.4962 \cdot 10^{-1}, R_6(0.25) \approx 0.6757 \cdot 10^{-1}.$$



1.1 pav.. Diverguojančios eilutės dalinių sumų paklaidos

Apskaičiuokime dar kelias paklaidas $R_n(x)$ ir palyginkime jas su x^{n+1}:

$$R_1(0.1) \approx 0.1556 \cdot 10^{-1},\ \left.\frac{R_1(x)}{x^2}\right|_{x=0.1} \approx 1.56;$$

$$R_1(0.01) \approx 0.1942 \cdot 10^{-3},\ \left.\frac{R_1(x)}{x^2}\right|_{x=0.01} \approx 1.94;$$

$$R_1(0.001) \approx 0.1994 \cdot 10^{-5},\ \left.\frac{R_1(x)}{x^2}\right|_{x=0.001} \approx 1.99;$$

$$R_2(0.1) \approx 0.4367 \cdot 10^{-2},\ \left.\frac{R_2(x)}{x^3}\right|_{x=0.1} \approx 4.37;$$

$$R_2(0.01) \approx 0.5771 \cdot 10^{-5},\ \left.\frac{R_2(x)}{x^3}\right|_{x=0.01} \approx 5.77;$$

$$R_2(0.001) \approx 0.5976 \cdot 10^{-8},\ \left.\frac{R_2(x)}{x^3}\right|_{x=0.001} \approx 5.98.$$

1.2 pratimas. Įrodykite, kad $(\forall n \in \mathcal{N} \cup \{0\})$ egzistuoja tokios teigiamos konstantos C_n, kad

$$|I(x) - I_n(x)| \leqslant C_n x^{n+1}, \text{ kai } x \in (0,1).$$

1.1.2. Pagrindiniai žymėjimai

Natūraliųjų skaičių aibę $\{1, 2, \dots\}$ žymėsime $\mathcal{N}$, realiųjų – $\mathcal{R}$, kompleksinių – $\mathcal{C}$, aibių A ir B Dekarto sandaugą – $A \times B$, $A^2 = A \times A$. Taško $a \in \mathcal{R}$ (arba $a \in \mathcal{C}$) δ-**aplinką** žymėsime

$$U_\delta(a) = \{x \in \mathcal{R} : \ |x - a| < \delta\}.$$

Aibę $U_\delta(a) \setminus \{a\}$ vadinsime taško a **pradurtąja** δ-aplinka ir žymėsime

$$\overset{o}{U}_\delta(a) = \{x \in \mathcal{R} : \ 0 < |x - a| < \delta\}.$$

Kai taškas $a = \pm\infty$ arba $a = \infty$, jo pradurtąją δ-aplinką apibrėžiame taip:

$$\overset{o}{U}_\delta(+\infty) = \{x \in \mathcal{R} : \ x > \delta\},$$

$$\overset{o}{U}_\delta(-\infty) = \{x \in \mathcal{R} : \ x < -\delta\},$$

$$\overset{o}{U}_\delta(\infty) = \{x \in \mathcal{C} : \ |x| > \delta\}.$$

Žymėjimas $f : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ reiškia, kad funkcijos f apibrėžimo sritis yra aibė $\mathcal{D}$ ir reikšmių sritis – $\mathcal{R}$. Pavyzdžiui, realiųjų skaičių seką galima pažymėti taip: $f : \mathcal{N} \to \mathcal{R}$.

Visų funkcijų

$$f : \ \mathcal{D} \cap \overset{o}{U}_\delta(a) \to \mathcal{R}$$

aibę žymėsime $\mathcal{F}\left(\mathcal{D} \cap \overset{o}{U}_\delta(a)\right)$ arba tiesiog $\mathcal{F}$. Aibės $\mathcal{F}$ teigiamų funkcijų poaibį žymėsime $\mathcal{F}_+ = \{f \in \mathcal{F} : \ f(x) > 0\}$.

1.1 apibrėžimas. Sakome, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra **lygios taško** $x = a$ **aplinkoje**, (arba lygios kai $x \to a$) ir rašome $(f, g) \in S_= \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ (kartais rašysime $f(x) = g(x)$), jei egzistuoja tokia teigiama konstanta $\tilde{\delta} < \delta$, kad

$$(\forall x \in \mathcal{D} \cap \overset{o}{U}_{\tilde{\delta}}(a)) \quad f(x) = g(x).$$

1.3 pratimas. Parodykite, kad $S_= \subset \mathcal{F}^2 = \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ yra ekvivalentumo sąryšis aibėje $\mathcal{F}$. T. y. šis sąryšis yra

1) refleksyvusis: $(\forall f \in \mathcal{F})\ (f, f) \in S_=$;
2) simetrinis: $(f, g) \in S_= \Rightarrow (g, f) \in S_=$;
3) tranzityvusis: $(f, g) \in S_=$ & $(g, h) \in S_=$, tai $(f, h) \in S_=$.

1.2 apibrėžimas. Sakome, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra **asimptotiškai ekvivalenčios**, kai $x \to a$ ir rašome $f \sim g$ arba $(f, g) \in S_\sim \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, jei egzistuoja tokia nykstamoji funkcija $\mu(x)$ (t. y. $\lim\limits_{x \to a} \mu(x) = 0$), kad

$$f(x) = (1 + \mu(x)) \cdot g(x).$$

1.1 pastaba. Jei $|g(x)| > 0$ iš 1.2 apibrėžimo išplaukia, kad

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

1.4 pratimas. Parodykite, kad aibė $S_\sim$ irgi yra ekvivalentumo sąryšis ir galioja

$$\boxed{S_= \subset S_\sim \subset \mathcal{F}^2}$$

1.1.3. Sąryšis O didžioji

Tarkime, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžtos srityje $\mathcal{D} \subset R$ (arba $\mathcal{D} \subset C$) ir egzistuoja toks teigiamas skaičius δ, kad

$$\mathcal{D} \cap \overset{o}{U}_\delta(a) \neq \varnothing.$$

1.3 apibrėžimas. Sakome, kad funkcijos $f(x)$ augimo greitis, kai $x \to a$ yra **ne didesnis** negu funkcijos $g(x)$ ir rašome $f(x) = O(g(x))$, jei egzistuoja tokios teigiamos konstantos C ir δ, kad

$$\left(\forall x \in \mathcal{D} \cap \overset{o}{U}_\delta(a)\right) \quad |f(x)| \leqslant C\ |g(x)|.$$

Pavyzdžiui, $x = O(\sqrt{x})$, kai $x \to +0$, kadangi 1.3 apibrėžimo formulėje galima paimti $C = \delta = 1$. Pastebėkime, kad $\sqrt{x} = O(x)$, kai $x \to +\infty$.

1.1 teorema. Funkcija $f(x) \in \mathcal{F}\left(\mathcal{D} \cap \overset{o}{U}_\delta(a)\right)$ yra **aprėžta** taško $x = a$ aplinkoje tada ir tik tada, kai

$$f(x) = O(1), \text{ kai } x \to a.$$

Taigi $\sin x = O(1)$, kai $x \to +\infty$; $\cos x = O(1)$, kai $x \to a$ $(\forall a \in R)$; $\dfrac{1}{x^\alpha} = O(1)$, kai $x \to +\infty$ $(\forall \alpha \geqslant 0)$; $x^\alpha = O(1)$, kai $x \to 0$ $(\forall \alpha \geqslant 0)$.

1.2 teorema. Tarkime, kad egzistuoja baigtinė riba

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C.$$

Tada $f(x) = O(g(x))$, kai $x \to a$.

Tai, kad atvirkštinis teiginys nėra teisingas, rodo 1.3 pavyzdys.

1.3 pavyzdys. $x \sin x = O(x)$, kai $x \to +\infty$, tačiau riba $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x \sin x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ neegzistuoja.

1.5 pratimas. Parodykite, kad teiginys $x = O(x \sin x)$, kai $x \to +\infty$ **nėra teisingas**.

Iš čia išplaukia, kad sąryšis $O \subset \mathcal{F}^2$ **nėra** simetrinis. Pavyzdys, $x = O(2x)$ ir $2x = O(x)$, kai $x \to a$ $(\forall a \in R)$ rodo, kad jis **nėra** ir antisimetrinis.

1.6 pratimas. Parodykite, kad sąryšis $O \subset \mathcal{F}^2$ nėra pilnasis: reikia rasti apibrėžtas taško a aplinkoje funkcijas $f(x)$ ir $g(x)$, kurioms nėra teisingas nei teiginys $f(x) = O(g(x))$, nei teiginys $g(x) = O(f(x))$ (kai $x \to a$).

1.3 teorema. Sąryšis $O \subset \mathcal{F}^2$ yra tranzityvusis, t. y. jei $f(x) = O(g(x))$ ir $g(x) = O(h(x))$, tai $f(x) = O(h(x))$ (kai $x \to a$).

Suformuluokime kitas sąryšio $O \subset \mathcal{F}^2$ savybes.

1. Jei $f(x) = O(g(x))$, kai $x \to a$, tai
   $\alpha \cdot f(x) = O(g(x))$ ir $(\forall \alpha \neq 0)$ $f(x) = O(\alpha \cdot g(x))$.

2. Jei $f_1(x) = O(g(x))$ ir $f_2(x) = O(g(x))$, kai $x \to a$, tai
   $f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$.

3. Jei $f_1(x) = O(g_1(x))$ ir $f_2(x) = O(g_2(x))$, kai $x \to a$, tai
   $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g_1(x) \cdot g_2(x))$.

1.2 pastaba. Lygybės ženklas reiškinyje $f = O(g)$ turi specifinę prasmę. Pavyzdžiui, $x + O(x) = O(x)$, kai $x \to 0$ reiškia, kad $(\forall f(x) = O(x))\ \ x + f(x) = O(x)$, t. y. $\exists C : |x + f(x)| \leqslant C|x|$ tam tikroje taško $x = 0$ aplinkoje. Taigi $O(x)$ kairėje lygybės pusėje reiškia bet kurią funkciją $f = O(x)$, t. y. visą tokių funkcijų klasę.

1.4 pavyzdys. Tarkime, kad $x \to \infty$ ir turime funkcijas

$$f(x) = 2x^2 - x + 3,\ \ g(x) = 3x^2 + 2x.$$

Funkciją

$$h(x) = x^3 + 3f(x) + g(x)$$

galima įvertinti taip:

$$h(x) = x^3 + O(x^2) + O(x^2) = x^3 + O(x^2).$$

Šis žymėjimas reiškia, kad egzistuoja tokios konstantos C ir Δ:

$$(\forall x > \Delta)\ |h(x) - x^3| \leqslant Cx^2.$$

Arba

$$\frac{|h(x) - x^3|}{x^2} \leqslant C.$$

Pastebėkime, kad šie įverčiai galioja bet kurioms funkcijoms $f(x) = O(x^2)$ ir $g(x) = O(x^2)$.

1.4 apibrėžimas. Sakome, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ turi vienodą augimo greitį (kartais sakome, kad sąryšis $f = O(g)$ yra geriausias funkcijos f augimo greičio viršutinis įvertis), kai $x \to a$ ir rašome $f(x) \asymp g(x)$ (arba $(f, g) \in S_{\asymp}$), jei

$$f(x) = O(g(x)) \text{ ir } g(x) = O(f(x)),\ \text{kai } x \to a.$$

Parodykite, kad $S_{\asymp}$ yra ekvivalentumo sąryšis ir

$$S_{\sim} \subset S_{\asymp} \subset \mathcal{F}^2.$$

1.5 apibrėžimas. Žymėjimas $f(x) \asymp 1$, kai $x \to a$ reiškia, kad egzistuoja tokios teigiamos konstantos m ir M, kad $m \leqslant |f(x)| \leqslant M$ (tam tikroje taško $x = a$ aplinkoje). Tokiu atveju sakome, kad funkcija $f(x)$ yra **logaritmiškai aprėžta**.

Pavyzdžiai

1. $\sin x \asymp x$, kai $x \to 0$;
2. $e^x \asymp 2 + x^2$, kai $x \to 0$;
3. $x^3 - x \asymp x^2 - x^3$, kai $x \to +\infty$.

Pastarasis pavyzdys rodo, kad iš $f_1(x) \asymp g_1(x)$ ir $f_2(x) \asymp g_2(x)$ **neišplaukia** $f_1(x) + f_2(x) \asymp g_1(x) + g_2(x)$.

1.3 pastaba. Jei $f_1 \sim g_1$ ir $f_2 \sim g_2$, tai $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$, tačiau teiginys $f_1 + f_2 \asymp g_1 + g_2$ (tuo labiau $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$) nėra teisingas.

1.1.4. Sąryšis o mažoji

1.6 apibrėžimas. Sakome, kad funkcijos $f(x)$ augimo greitis, kai $x \to a$ yra **mažesnis** negu funkcijos $g(x)$ ir rašome $f(x) = o\left(g(x)\right)$ (arba $f(x) \ll g(x)$), jei $\forall \varepsilon > 0$ egzistuoja tokia teigiama konstanta $\delta_\varepsilon < \delta$, kad

$$\left(\forall x \in \mathcal{D} \cap \overset{o}{U}_{\delta_\varepsilon}(a)\right) \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon\, |g(x)|\,.$$

Pavyzdžiui, $x = o\left(x^2\right)$, kai $x \to +\infty$; $\ln x = o\left(e^x\right)$, kai $x \to +\infty$; $x \sin \dfrac{1}{x} = o(1)$, kai $x \to 0$; $x = o\left(\sqrt{x}\right)$, kai $x \to +0$.

1.4 pastaba. $f(x) = o(1)$, kai $x \to a$ reiškia, kad $f(x)$ yra nykstamoji funkcija, t. y. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

1.4 teorema. Sąryšis o mažoji yra sąryšio O didžioji poaibis:

$$\boxed{o \subset O \subset \mathcal{F}^2}$$

T. y. jei $f(x) = o(g(x))$, kai $x \to a$, tai $f(x) = O(g(x))$.

Atvirkštinis teiginys nėra teisingas.

Sąryšio o mažoji savybės

1. Sąryšis $o \subset \mathcal{F}^2$ yra tranzityvusis.
2. Aibėje $\mathcal{F}_+$ sąryšis o yra antisimetrinis.

3. Jei $f(x) = O(g(x))$ ir $g(x) = o(h(x))$, tai
   $f(x) = o(h(x))$, kai $x \to a$.
   Arba rašome trumpiau:
   $$\boxed{O(o(h)) = o(h)}$$

4. Jei $f_1(x) = o(g(x))$ ir $f_2(x) = o(g(x))$, tai
   $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$ (kai $x \to a$).
   Trumpiau rašome:
   $$\boxed{o(g) + o(g) = o(g)}$$

5. Jei $f_1(x) = o(g(x))$ ir $f_2(x) = O(g(x))$, tai
   $f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$ (kai $x \to a$).
   Trumpiau rašome:
   $$\boxed{o(g) + O(g) = O(g)}$$
   .

6. Jei $f_1(x) = o\left(g_1(x)\right)$ ir $f_2(x) = o\left(g_2(x)\right)$, tai
   $f_1(x) \cdot f_2(x) = o\left(g_1(x) \cdot g_2(x)\right)$ (kai $x \to a$).
   Rašome:
   $$\boxed{o\left(g_1\right) \cdot o\left(g_2\right) = o\left(g_1 \cdot g_2\right)}$$

7. Jei $f_1(x) = o\left(g_1(x)\right)$ ir $f_2(x) = O\left(g_2(x)\right)$, tai
   $f_1(x) \cdot f_2(x) = o\left(g_1(x) \cdot g_2(x)\right)$ (kai $x \to a$).
   Rašome:
   $$\boxed{o\left(g_1\right) \cdot O\left(g_2\right) = o\left(g_1 \cdot g_2\right)}$$

8. $f(x) - g(x) = o(f(x))$ tada ir tik tada, kai
   $f(x) - g(x) = o(g(x))$ (kai $x \to a$).

9. $f \sim g$ tada ir tik tada, kai $f - g = o(f)$.

1.1.5. Asimptotinių sąryšių integravimas ir diferencijavimas

Tarkime, kad $x \to +\infty$ ir funkcija $f(x)$ apibrėžta, kai $x \in (\Delta, +\infty)$. Konstanta $a > \Delta$.

1.5 teorema. Tarkime, kad $f(x) \sim x^\alpha$ ir $\alpha > -1$. Tada

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt \sim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Įrodymas. $f(x) \sim x^\alpha \Rightarrow f(x) = x^\alpha\,(1+\mu(x))$. Čia $\mu(x)$ yra nykstamoji funkcija. Taigi $\forall\varepsilon>0\ \exists X : (\forall x > X)\ |\mu(x)| < \varepsilon$. Taigi turime

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^X f(t)\,dt + \int_X^x f(t)\,dt = \int_a^X f(t)\,dt + \int_X^x \left(t^\alpha + t^\alpha\mu(t)\right)\,dt =$$

$$\int_a^X f(t)\,dt + \frac{1}{\alpha+1}\left(x^{\alpha+1} - X^{\alpha+1}\right) + \int_X^x t^\alpha\mu(t)\,dt.$$

Iš čia gauname

$$\frac{\alpha+1}{x^{\alpha+1}}\int_a^x f(t)\,dt - 1 = \frac{\alpha+1}{x^{\alpha+1}}\int_a^X f(t)\,dt - \frac{X^{\alpha+1}}{x^{\alpha+1}} + \frac{\alpha+1}{x^{\alpha+1}}\int_X^x t^\alpha\mu(t)\,dt.$$

Šios lygybės dešinėje pusėje pirmieji du nariai artėja į nulį, kai $x\to+\infty$, o trečiasis narys įvertinamas taip:

$$\left|\frac{\alpha+1}{x^{\alpha+1}}\int_X^x t^\alpha\mu(t)\,dt\right| \leqslant \frac{\alpha+1}{x^{\alpha+1}}\varepsilon\int_X^x t^\alpha\,dt = \varepsilon\left(1 - \frac{X^{\alpha+1}}{x^{\alpha+1}}\right).$$

Taigi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha+1}{x^{\alpha+1}}\int\limits_a^x f(t)\,dt = 1$.

1.7 pratimas. Įrodykite, kad $\int\limits_a^x f(t)\,dt \sim c$, kai $\alpha < -1$ ($c - const$).

1.8 pratimas. Įrodykite, kad $\int\limits_a^x f(t)\,dt \sim \ln x$, kai $\alpha = -1$.

1.6 teorema. Tarkime, kad funkcijos $f(x) \sim x^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$ išvestinė $f'(x)$ yra tolydžioji nemažėjanti funkcija. Tada $f'(x) \sim \alpha x^{\alpha-1}$.

Įrodymas. Turime $f(x) = x^\alpha\,(1+\mu(x))$, $|\mu(x)| < \varepsilon$, kai $(\forall x > X)$ (žr. 1.5 teoremos įrodymą.) Funkcija $f'(x)$ nemažėjanti ir tolydi. Todėl $\forall h > 0$

$$hf'(x) \leqslant \int_x^{x+h} f'(t)\,dt = f(x+h) - f(x) = (x+h)^\alpha\,(1+\mu(x+h)) - x^\alpha\,(1+\mu(x)) =$$

$$\int_x^{x+h}\alpha x^{\alpha-1}\,dt + (x+h)^\alpha\mu(x+h) - x^\alpha\mu(x) \leqslant h\alpha\,(x+h)^{\alpha-1} + 2\varepsilon\,(x+h)^\alpha\,.$$

Paimkime, $h = \sqrt{\varepsilon}x$. Tada

$$f'(x) \leqslant \alpha x^{\alpha-1}\left(\left(1+\sqrt{\varepsilon}\right)^{\alpha-1} + \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\alpha}\left(1+\sqrt{\varepsilon}\right)^\alpha\right)$$

Dabar įvertinkime funkciją $f'(x)$ iš apačios. Turime

$$hf'(x) \geqslant \int_{x-h}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(x-h).$$

Kartojame pirmojo atvejo įverčius ir, kai $x > \dfrac{X}{1-\sqrt{\varepsilon}}$, gauname

$$f'(x) \geqslant \alpha x^{\alpha-1}\left(\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right)^{\alpha-1} - \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\alpha}\right)$$

Taigi turime $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}} = 1$.

1.5 pastaba. Išvestinės monotoniškumo reikalavimas yra svarbus. Pavyzdžiui, $f(x) = x+\sin x \sim x$, kai $x \to +\infty$. Tačiau teiginys $f'(x) = 1+\cos x \sim 1$ nėra teisingas.

1.2. Funkcijų asimptotinis palyginimas

1.2.1. Funkcijų palyginimo skalės

Tarkime, kad $\mathcal{S}_{\mathcal{I}} \subset \mathcal{F}$ $(\mathcal{I} \subset R)$ yra funkcijų, nelygių nuliui taško $x = a$ aplinkoje, aibė: $((f(x), 0) \notin S_{=} \subset \mathcal{F}^2)$. T. y. bet kurioje šio taško aplinkoje yra bent vienas taškas, kuriame funkcija nelygi nuliui.

1.7 apibrėžimas. Sakome, kad funkcijų aibė $\mathcal{S}_{\mathcal{I}} \subset \mathcal{F}$ yra **palyginimo skalė**, jei $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{I} \subset R$

$$\alpha < \beta \ \Rightarrow f_\beta(x) = o\left(f_\alpha(x)\right).$$

Pavyzdžiai

1. $\mathcal{S}_{\{0,1,\ldots\}} = \{1, x, x^2, \ldots\}$, $x \to 0$;
2. $\mathcal{S}_{[0,+\infty)} = \{x^{-\alpha}\}$, $x \to +\infty$, $\alpha > 0$;
3. $\mathcal{S}_N = \{e^{-\gamma_n x}\}$, γ_n – bet kuri didėjanti skaičių seka, $x \to +\infty$.

1.6 pastaba. Funkcijų aibė $\{1, x, x^2, \ldots\}$ **nėra** asimptotinė skalė, kai $x \to +\infty$, kadangi šiuo atveju $x \neq o(1)$, $x^2 \neq o(x)$ ir t. t. Panašiai antrojo ir trečiojo pavyzdžių funkcijų aibės nėra asimptotinės skalės, kai $x \to 0$.

1.8 apibrėžimas. Sakome, kad funkcija $f(x) \in \mathcal{F}$ turi asimptotinį skleidinį skalėje $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$, kai $x \to a$, jei egzistuoja tokios funkcijos g_{α_1}, g_{α_2}, …, $g_{\alpha_n} \in \mathcal{S}_{\mathcal{I}}$, ir tokie nelygūs nuliui realieji (arba kompleksiniai) skaičiai a_1, a_2, $\cdots$, a_n, kad

$$f(x) - \Big(a_1 g_{\alpha_1}(x) + a_2 g_{\alpha_2}(x) + \cdots + a_n g_{\alpha_n}(x)\Big) = o\left(g_{\alpha_n}(x)\right).$$

Sakome, kad šio skleidinio tikslumas yra $o\Big(g_{\alpha_n}(x)\Big)$, $a_j g_{\alpha_j}$ – skleidinio nariai, a_j – jo koeficientai, funkcija

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j g_{\alpha_j}(x)$$

vadinama skleidinio liekana.

1.7 pastaba. Tai, kad visi asimptotinio skleidinio koeficientai nelygūs nuliui, reiškia, kad į jį įeina tik atitinkamos skalės funkcijos $g_{\alpha_j(x)}$. Gali atsitikti, kad asimptotinė skalė tokių funkcijų neturi. Tada sakome, kad funkcija $f(x)$ neturi asimptotinio skleidinio šioje skalėje arba turi nulinį skleidinį.

Pavyzdžiai

1. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$, $x \to 0$;
2. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ neturi skleidinio skalėje $\left\{1, \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^2}, \ldots\right\}$, kai $x \to +\infty$.
3. $e^{-\frac{1}{(x-a)^2}}$ neturi skleidinio skalėje $\{(x-a)^{\alpha},\ \alpha \in R\}$, kai $x \to a$.

1.8 pastaba. Jei turime asimptotinį skleidinį $f = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j g_{\alpha_j} + o\left(g_{\alpha_n}\right)$, tai pastebėję, kad $g_{\alpha_n} = o\left(g_{\alpha_{n-1}}\right)$, $O(f) + o(f) = O(f)$ ir $O(o(f)) = o(f)$, iš jo gauname

$$\begin{aligned} f = \sum_{j=1}^{n-1} a_j g_{\alpha_j} + g_n a_{\alpha_n} + o\left(g_{\alpha_n}\right) = \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_j g_{\alpha_j} + O\left(g_{\alpha_n}\right) = \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_j g_{\alpha_j} + o\left(g_{\alpha_{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Taigi galima paimti pirmuosius asimptotinio skleidinio narius ir gauti irgi asimptotinį skleidinį. Sakome, kad turintis didesnį liekanos $o\left(g_\alpha\right)$ indeksą α skleidinys turi **aukštesnės eilės tikslumą**.

Kai $n=1$ gauname tokį asimptotinį skleidinį:

$$f(x)=a_1 g_{\alpha_1}(x)+o\left(g_{\alpha_1}(x)\right).$$

1.9 apibrėžimas. Sakome, kad reiškinys $a_1 g_{\alpha_1}(x)$ yra funkcijos $f(x)$ asimptotinio skleidinio **pagrindinis narys**.

Pastebėkime, kad $f(x)\sim a_1 g_{\alpha_1}(x)$.

1.5 pavyzdys. Funkcijos $\sin x$ asimptotinio skleidinio skalėje $\{(e^x-1)^\alpha,\ \alpha\in R\}$ pagrindinis narys yra e^x-1:

$$\sin x=e^x-1+o\left(e^x-1\right),\ x\to 0.$$

1.2.2. Asimptotinių skleidinių savybės

1.7 teorema. Nulinė funkcija **neturi** asimptotinio skleidinio. T. y. visi skleidinio

$$0=\sum_{j=1}^{n} a_j s_{\alpha_j}+o\left(s_{\alpha_n}\right)$$

koeficientai a_j lygūs nuliui.

Įrodymas. Tarkime, kad a_i – pirmasis nenulinis koeficientas. Tada pastebėję, kad $(\forall j>i)\ s_{\alpha_j}=o\left(s_{\alpha_i}\right)$, turime $a_i s_{\alpha_i}=-\sum\limits_{j=i+1}^{n} a_j s_{\alpha_j}+o\left(s_{\alpha_i}\right)=o\left(s_{\alpha_i}\right)$. Tada gauname, kad jei $a_i\neq 0$, tai $s_{\alpha_i}=o\left(s_{\alpha_i}\right)$ ir todėl $s_{\alpha_i}=0$. Tai prieštarauja reikalavimui, kad s_{α_i} yra asimptotinės skalės funkcija.

1.9 pastaba. Atvirkštinis teiginys nėra teisingas: skirtingos funkcijos gali turėti tą patį skleidinį toje pačioje skalėje.

1.8 teorema. Jei funkcija turi tikslumo $o\left(s_\alpha\right)$ asimptotinį skleidinį, tai šis skleidinys yra vienintelis.

1.9 teorema. Jei funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ turi asimptotinius skleidinius skalėje $\mathcal{I}=\{s_\alpha(x)\}$:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} a_j s_{\alpha_j}+o\left(s_{\alpha_n}\right),\ g(x)=\sum_{j=1}^{n} b_j s_{\alpha_j}+o\left(s_{\alpha_n}\right),\text{tai}$$

$$(\forall \lambda, \mu \in R)\ \lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_j + \mu b_j)\, s_{\alpha_j} + o\,(s_{\alpha_n})\,.$$

1.10 apibrėžimas. Sakome, kad palyginimo skalė $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ turi **multiplikatyvumo** savybę (yra multiplikatyvioji), kai $(\forall g_\alpha, g_\beta \in \mathcal{S}_{\mathcal{I}})$

$$g_\alpha \cdot g_\beta \sim \sum_{j=1}^{n} a_j g_{\gamma_j} + o\,(g_{\gamma_n})$$

T. y. bet kurių skalės funkcijų sandauga irgi yra skalės funkcija.

Šią savybę turi, pavyzdžiui, laipsninių funkcijų skalės

$$\{1, x, x^2, x^3, \ldots\},\ x \to 0,$$

$$\{1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \cdots\},\ x \to +\infty.$$

Tarkime, kad φ_i, ψ_j, χ_k yra *multiplikatyviosios* palyginimo skalės $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ funkcijos ir $\varphi_i\psi_j \sim \sum\limits_{k=1}^{l} \gamma_{ijk}\chi_k$. Jei $f \sim \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\varphi_i + o(\varphi_n)$, $g \sim \sum\limits_{j=1}^{m} b_j\psi_j + o(\psi_m)$, tai

$$f \cdot g \sim \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i + o(\varphi_n)\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\psi_j + o(\psi_m)\right) \sim$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \varphi_i \psi_j + o(\varphi_1\psi_m) + o(\varphi_n\psi_1) \sim$$

$$\sum_{k=1}^{l} c_k\chi_k + o(\varphi_1\psi_m) + o(\varphi_n\psi_1) + o(\chi_l).$$

$$c_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \gamma_{ijk}$$

1.6 pavyzdys. Raskime funkcijos $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, kai $x \to 0$ pirmuosius narius. Kadangi $\cot x \sim \dfrac{1}{x}$, turime
$\cot x = \dfrac{c_{-1}}{x} + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + o\,(x^n).$

Todėl turi būti

$$\left(\sum_{j=-1}^{n} c_j x^j + o\left(x^n\right)\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{x^{2j-1}}{(2j-1)!} + o\left(x^n\right)\right) =$$
$$\left(\frac{c_{-1}}{x} + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots\right) \times \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots\right) =$$
$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + o\left(x^k\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots .$$

Taigi $c_{-1} = 1$, $c_0 = 0$, $-\frac{c_{-1}}{3!} + c_1 = -\frac{1}{2!}$, $\ldots$ ir gauname

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \frac{2x^9}{93555} + o\left(x^{11}\right).$$

1.2.3. Asimptotiniai skleidiniai ir eilutės

1.11 apibrėžimas. Funkcijų palyginimo skalę $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ vadiname *normaliąja*, kai egzistuoja tokia taško $x = a$ pradurtoji δ-aplinka $\overset{o}{U}_\delta(a)$, kad kiekvieną skalės funkciją $g_\alpha(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ galima išreikšti tokiu pavidalu $g_\alpha(x) = h(x) h_\alpha(x)$, o funkcijos $h_\alpha(x) \neq 0$ $\left(\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(a)\right)$. Kai $h(x) \equiv 1$, skalę vadiname *paprastąja*.

Pastebėkime, kad normaliosios skalės funkcijoms egzistuoja santykiai

$$\frac{g_\alpha(x)}{g_\beta(x)} = \frac{h_\alpha(x)}{h_\beta(x)}.$$

Pažymėkime, $N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

1.12 apibrėžimas. Normajiąją funkcijų palyginimo skalę $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ vadiname *asimptotine seka*, kai $\mathcal{I} \subset N_0$.

Taip apibrėžtos asimptotinės sekos ir eilutės dar vadinamos klasikinėmis arba Puankare (H. Poincaré, 1886) skleidiniais.

Priminsime, kad

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k g_k(x) + o\left(g_n(x)\right).$$

Kai šis teiginys teisingas $(\forall n \in N)$, rašome

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k g_k(x)$$

ir užrašytą reiškinį vadiname **asimptotine eilute**.

Pastebėję, kad $O(g) + o(g) = O(g)$, gauname

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k g_k(x) = a_n g_n(x) + o(g_n(x)) = O(g_n(x)).$$

Todėl

$$a_n = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k g_k(x)}{g_n(x)}.$$

1.2.4. Laipsninės asimptotinės eilutės

Tarkime, kad kompleksinis skaičius $z \to \infty$. Kai $x \to a$, galima pakeisti kintamąjį: $z = \dfrac{1}{x-a}$.

Jei $f(z)$ turi asimptotinį skleidinį skalėje $\left\{\dfrac{g(z)}{z^n}, n = 0, 1, 2, \dots\right\}$, rašome

$$f(z) \sim g(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Arba

$$\frac{f(z)}{g(z)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Pavyzdžiui, (kai $z \to \infty$)

$$\frac{1}{z-1} = \left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \sim \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Panašiai

$$\frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z^2-1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}}.$$

Taigi skalėje $\{(z+1)z^{-2n}\}$ turime kitą funkcijos $\dfrac{1}{z-1}$ skleidinį

$$\frac{1}{z-1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z+1}{z^{2n}}.$$

Pastebėkime, kad abi asimptotinės eilutės konverguoja, kai $|z| > 1$.

1.10 teorema. Tarkime, kad tolydžioji, kai $x > \delta > 0$, funkcija $f(x)$ turi asimptotinį skleidinį

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}.$$

Tada integralas

$$F(x) = \int_x^{\infty} \Big(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \Big)\, dt$$

išskleidžiamas asimptotine eilute

$$F(x) \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \frac{a_4}{3x^3} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{nx^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{nx^n}.$$

1.11 teorema. Tarkime, kad funkcija $f(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{x^n}$ $(x > \delta > 0)$ turi tolydžiąją išvestinę $f'(x)$, kurią galima išskleisti asimptotine laipsnine eilute. Tada šis skleidinys turi tokį pavidalą:

$$f'(x) \sim \; -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)a_{n-1}}{x^n}.$$

Įrodymas. Ieškome egzistuojančio asimptotinio skleidinio $f'(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{b_n}{x^n}$ koeficientų b_n. Kadangi $f'(x)$ tolydžioji funkcija, turime

$$f(y) - f(x) = \int\limits_x^y f'(t)\, dt = b_0(y - x) + b_1 \ln \frac{y}{x} + \int\limits_x^y \Big(f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} \Big)\, dt.$$

Funkcija $f'(x)$ skleidžiama laipsnine eilute. Todėl $f'(t) - b_0 - \dfrac{b_1}{t} = O\left(\dfrac{b_1}{t^2}\right)$ ir integralas $\int\limits_x^{\infty} \left(f'(t) - b_0 - \dfrac{b_1}{t} \right) dt$ konverguoja. Iš čia gauname $b_0 = b_1 = 0$ ir taikome 1.10 teoremą. Turime $a_0 - f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_{n+1}}{nx^n}$. Antra vertus, $a_0 - f(x) \sim \; -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{x^n}$. Taigi turime $b_{n+1} = -na_n$.

1.2.5. Tolygiai tinkami asimptotiniai skleidiniai

Tarkime, kad $f(x,y)$ ir funkcijos $\varphi_k(x)$ apibrėžtos,
kai $x \in \overset{o}{U}_\delta(a)$, $y \in Y \subset R$.

1.13 apibrėžimas. Sakome, kad $\sum\limits_k a_k(y)\varphi_k(x)$ yra funkcijos $f(x,y)$ tolygiai tinkamas pagal $y \in Y$, kai $x \to a$ asimptotinis skleidinys, jei $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0$

$$\left(\forall y \in Y,\; x \in \overset{o}{U}(_{\delta_\varepsilon}(a)\right) \quad \left|f(x,y) - \sum_{k=0}^{n} a_k(y)\varphi_k(x)\right| < \varepsilon\,|\varphi_n(x)|$$

Taigi svarbu, kad konstantą δ_ε nepriklauso nuo y. Kitaip tariant asimptotinis įvertis $o\left(\varphi_{n+1}(x)\right)$ yra tolygus pagal $y \in Y$.

Pavyzdžiui, skleidinys (kai $x \to 0$)

$$\frac{1}{y+x} \sim \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y^3} - \cdots$$

yra tolygiai tinkamas srityje $y \in [1, +\infty)$, bet nėra tolygiai tinkamas srityje $y \in (0, 1]$. Tarkime, jei $y = x = 0.1$, gausime $5 \sim 10 - 10 + 10 - \cdots$.

1.2.6. Uždaviniai

1. Kurios iš pateiktų funkcijų yra asimptotiškai ekvivalenčios x, kai $x \to 0$?
(a) $f(x) = x - x^2 + \sin x$;
(b) $g(x) = x - x^2 - \sin x$;
(c) $h(x) = 2x - x^3 - \tan x$;
(d) $u(x) = \sin 2x^4 - x^3 - \tan x$;
(e) $v(x) = \dfrac{\sin 2x^4 - x^3}{\tan x^3}$;
(f) $w(x) = \dfrac{\sin 2x^4 + x^3}{\tan x^2}$.

2. Kurios iš pateiktų funkcijų yra asimptotiškai ekvivalenčios 1, kai $x \to +\infty$?
(a) $f(x) = x - \ln x + \sin x$;
(b) $g(x) = x - \sqrt{1 + x^2} + \sin x$;
(c) $h(x) = \dfrac{2x + x^3 - \tan x}{x^3}$;
(d) $u(x) = \dfrac{\sin 2x^4 + x^3 + \tan x}{\tan x}$;

(e) $v(x) = \dfrac{\sin 2x^4 + x^3 + \tan x^3}{x^3}$;
(f) $w(x) = \dfrac{x^2 - \sin 2x^4 + \sin x^3}{x^2}$.

3. Supaprastinkite reiškinį ir pagrįskite atsakymą.
(a) $x^2 + O\left(x^3\right) + o\left(x^2\right)$, kai $x \to 0$;
(b) $x^3 + O\left(x^3\right) + o\left(x^2\right)$, kai $x \to \infty$;
(c) $x^4 + O\left(e^x\right)$, kai $x \to \infty$;
(d) $\sin(x) + O(x) + o(x)$, kai $x \to 0$.

4. Kurie teiginiai yra teisingi?
(a) $x \sin \frac{1}{x} = O(x)$, kai $x \to 0$;
(b) $x \sin \frac{1}{x} = O(x)$, kai $x \to +\infty$;
(c) $x = O\left(x \sin \dfrac{1}{x}\right)$, kai $x \to 0$;
(d) $x = O\left(x \sin \dfrac{1}{x}\right)$, kai $x \to +\infty$;
(e) $x^2 = O\left(x^3 \sin x\right)$, kai $x \to +\infty$;
(f) $x^2 = o\left(x^3 \sin x\right)$, kai $x \to +\infty$;
(g) $x \sin \frac{1}{x} = o\left(\sqrt{x}\right)$, kai $x \to 0$;
(h) $\sqrt{x} = o\left(x \tan x\right)$, kai $x \to +\infty$.

5.
(a) Įrodykite, kad jei funkcija $f(x) : [0, +\infty) \to R$ yra tolydi ir $f(x) = o\left(e^x\right)$, tai $\int\limits_0^x f(t)\, dt = o\left(e^x\right)$, kai $x \to +\infty$.
(b) Pakeiskite teiginio įvertį $O\left(e^x\right)$.
(c) Išnagrinėkite atvejį $\sim \left(e^x\right)$.

6.
(a) Įrodykite, kad jei funkcija $f(x) : [0, +\infty) \to R$ yra du kartus tolydžiai diferencijuojama, $f(x) = O\left(e^x\right)$, $(\forall x) f''(x) > 0$, tai $f'(x) = O\left(e^x\right)$, kai $x \to +\infty$.
(b) Pakeiskite teiginio įvertį $o\left(e^x\right)$.
(c) Išnagrinėkite atvejį $\sim \left(e^x\right)$.

7. Tarkime, kad taško $z = 0$ aplinkoje $f(z)$ yra analizinė funkcija. Įrodykite, kad eilutė $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ yra funkcijos $f(z)$ asimptotinis skleidinys, kai $x \to 0$.

Ar skleidiniai

(a) $\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

(b) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

(c) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}$;

(d) $\ln\{1+x\} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n}}{n}$

yra asimptotiniai, kai $x \to +\infty$.

8. Raskite funkcijų asimptotinių skleidinių pirmuosius narius, kai $\varepsilon \to 0$.

(a) $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon^2}{5}\right)^{-1}$;

(b) $\sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon^2}{5}}$;

(c) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon^2}{5}\right)$.

9.

(a) Nurodykite funkcijų augimo hierarchiją, kai $x \to +0$.

$e^{-\frac{1}{x}}$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\sqrt{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $\ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, x, x^2, $\sqrt{x}$, $e^{\frac{1}{x}}$.

(b) Išnagrinėkite atvejį, kai $x \to +\infty$.

10. Nurodykite sritį, kurioje asimptotinis skleidinys yra tolygiai tinkamas.

(a) $f(x;\varepsilon) = 1 - \varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 + O\left(\varepsilon^3\right)$;

(b) $g(x;\varepsilon) = \varepsilon x + \frac{\varepsilon^2 x^2}{2!} + \frac{\varepsilon^3 x^3}{3!} + \frac{\varepsilon^4 x^4}{4!} + O\left(\varepsilon^5\right)$;

(c) $h(x;\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{1-x} + \frac{\varepsilon^2}{(1-x)^2} + O\left(\varepsilon^3\right)$.

1.3. Algebrinių ir transcendenčiųjų lygčių asimptotiniai sprendiniai

1.3.1. Reguliarieji ir singuliarieji uždaviniai

Tarkime, kad funkcija $F(x,\varepsilon))$ apibrėžta taško $(x_0,0)$ δ-aplinkoje $U_\delta = \{(x,\varepsilon): |x-x_0|+\varepsilon<\delta\}$ ir turi visų eilių išvestines (rašome $f(x)\in C^\infty(U_\delta)$). Pažymėkime $x(\varepsilon)$ lygties

$$F(x,\varepsilon)=0 \tag{1.3}$$

sprendinį. T. y. $F(x(\varepsilon),\varepsilon)\equiv 0$. Bandome ieškoti sprendinio laipsninės eilutės pavidalu

$$x(\varepsilon)=x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\cdots$$

Įstatome šį skleidinį į (1.3) lygtį ir skleidžiame $F(x,\varepsilon)$ Teiloro eilute

$$F(x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\cdots,0)+\frac{\partial F(x_0+\cdots,0)}{\partial\varepsilon}\varepsilon+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2F(x_0+\cdots,0)}{\partial\varepsilon^2}\varepsilon^2+\cdots$$

Ieškome koeficientų x_0, x_1, x_3, ... :

$$F(x_0,0)=0$$

$$\frac{\partial F(x_0,0)}{\partial x}x_1+\frac{\partial F(x_0,0)}{\partial\varepsilon}=0$$

$$\cdots$$

Jei $x(\varepsilon)\in C^\infty[0,\varepsilon_0)$ ir $x(0)=0$, $x'(0)=x_1$, ... (1.3) uždavinį vadinsime **reguliariuoju**. Tačiau, galimas atvejis, kai $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}x(\varepsilon)\neq x_0$. Tokiu atveju uždavinį vadinsime **singuliariuoju**.

Lygtį $F(x,\varepsilon)=0$ vadiname **sutrikdytąja**, o lygtį $F(x,0)=0$ – **nesutrikdytąja**. Nesutrikdytoji lygtis gali prarasti esminius uždavinio ypatumus ir dėl to uždavinys bus singuliarusis.

1.7 pavyzdys. Išspręskime kvadratinę lygtį $x^2-\varepsilon x-1=0$.

Įstatome skleidinį $x(\varepsilon)=x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\cdots$ į lygtį:

$$\left(x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\cdots\right)^2-\varepsilon\left(x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\cdots\right)-1=0.$$

Gauname

$$x_0^2=1 \;\Rightarrow x_0=\pm 1;$$

$$2x_0x_1-x_0=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{2};$$

$$2x_0x_2 + x_1^2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{x_1 - x_1^2}{2x_0} = \pm\frac{1}{8}$$

$$\ldots$$

Taigi gauname abiejų kvadratinės lygties šaknų asimptotinius skleidinius:

$$x(\varepsilon) = \pm 1 + \frac{1}{2}\varepsilon \pm \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \cdots$$

Matome, kad sukonstruotas skleidinys sutampa su tikslioji sprendinio

$$x(\varepsilon) = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

pirmaisiais Teiloro formulės nariais. Taigi uždavinys yra reguliarusis.

1.8 pavyzdys. Išnagrinėsime singuliarųjį uždavinį

$$\varepsilon x^2 - x - 1 = 0.$$

Tikslusis sprendinys $x(\varepsilon) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2\varepsilon}$ gali būti išskleistas laipsnine eilute

$$x^+(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \varepsilon + \cdots$$

$$x^-(\varepsilon) = -1 + \varepsilon - \cdots$$

Matome, kad ieškodami sprendinio skleidinio $x(\varepsilon) = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \cdots$ pavidalu, gausime tik vienos šaknies $x^-(\varepsilon)$ asimptotiką.

1.3.2. Kvadratinės lygties asimptotinė analizė

Nagrinėsime kvadratinę lygtį

$$a(\varepsilon)x^2 + b(\varepsilon)x + c(\varepsilon) = 0.$$

Užrašome sprendinį

$$x(\varepsilon) = \frac{-b(\varepsilon) \pm \sqrt{b^2(\varepsilon) - 4a(\varepsilon)c(\varepsilon)}}{2a(\varepsilon)} = -\frac{b(\varepsilon)}{2a(\varepsilon)} \pm \sqrt{\left(\frac{b(\varepsilon)}{2a(\varepsilon)}\right)^2 - c(\varepsilon)}.$$

Nagrinėsime galimus atvejus.

1. $\dfrac{b}{a} \asymp 1$, $c \asymp 1$ ir $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - c \asymp 1$. Tada $x(\varepsilon) \asymp 1$.

2. Tarkime, kad $\dfrac{b}{a} \ll 1$ ir $c \asymp 1$. Tada $x(\varepsilon) = \pm\sqrt{-c(\varepsilon)} + O\left(\dfrac{b(\varepsilon)}{a(\varepsilon)}\right)$.

3. Tarkime, kad $\dfrac{b}{a} \gg 1$ ir $c \asymp 1$.

   Tada $x^+(\varepsilon) = O\left(\dfrac{a(\varepsilon)}{b(\varepsilon)}\right)$, $x^-(\varepsilon) = O\left(\dfrac{b(\varepsilon)}{a(\varepsilon)}\right)$.

4. Tarkime, kad $\dfrac{b}{a} \asymp 1$ ir $c \gg 1$.

   Tada $x(\varepsilon) = \pm\sqrt{c(\varepsilon)} + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{c\,(\varepsilon)}}\right)$

5. Kai $\dfrac{b}{a} \ll 1$ arba $\dfrac{b}{a} \gg 1$ ir $c \ll 1$ arba $c \gg 1$ galimi trys atvejai

   (a) $c\dfrac{b}{a} \ll 1$;

   (b) $c\dfrac{b}{a} \asymp 1$;

   (c) $c\dfrac{b}{a} \gg 1$;

Išnagrinėkime reguliarias funkcijas

$$a(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots,$$

$$b(\varepsilon) = b_0 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \cdots,$$

$$c(\varepsilon) = c_0 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \cdots$$

Tada turime pirmąjį atvejį $x(\varepsilon) \asymp 1$, jei $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $c_0 \neq 0$ ir $c_0 \neq \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$. Šiuo atveju uždavinys reguliarusis ir $x(\varepsilon) = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \cdots$.

Kai $a_0 = 0$ ir $b_0 \neq 0$, uždavinys yra singuiarusis.

1.9 pavyzdys. $x^2 - x + \varepsilon = 0$

Turime $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{1} = 1$, t. y. reguliarųjį atvejį (įrodykite). Todėl sprendinio ieškome taip:

$$x(\varepsilon) = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \cdots$$

Istatome šį reiškinį į lygtį:

$$x_0^2 - x_0 + (2x_0x_1 - x_1 + 1)\varepsilon + (x_1^2 + 2x_0x_2 - x_2)x_1\varepsilon^2 + \cdots = 0.$$

Iš čia gauname
$x_0^2 - x_0 = 0,$
$x_1 = -\dfrac{1}{2x_0 - 1},$
$x_2 = -\dfrac{x_1^2}{2x_0 - 1}$
$\dots$
Taigi turime abiejų šaknų skleidinius:
$x(\varepsilon) = 1 - \varepsilon - \varepsilon^2 + \cdots$
$x(\varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots$
Akivaizdu, kad tuos pačius reiškinius gauname ir skleisdami ε laipsniais tikslųjį sprendinį $x(\varepsilon) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2}$.

Uždaviniai

1. $x^2 - (3 + 2\varepsilon)x + 2 + \varepsilon = 0;$
2. $x^2 - (1 - \varepsilon)x + \mu(\varepsilon)(1 - x) = 0,\ \mu(\varepsilon) \sim 1;$
3. $\varepsilon x^2 + x + 1 = 0.$

1.3.3. Aukštesniųjų eilių algebrinės lygtys

Nagrinėsime kubinę lygtį

$$(y - x_1(\varepsilon)) \cdot (y - x_2(\varepsilon)) \cdot (y - x_3(\varepsilon)) \cdot = 0,$$

$$x_j(\varepsilon) = x_j^0 + x_j^{(1)}\varepsilon + x_j^{(2)}\varepsilon^2 + \cdots,\ j = 1, 2, 3.$$

Jei $x_1^0 \neq x_2^0$, $x_1^0 \neq x_3^0$, $x_2^0 \neq x_3^0$ uždavinys yra reguliarusis ir sprendinio ieškome tokiu pavidalu

$$y_j(\varepsilon) = x_j^0 + y_j^1\varepsilon + y_j^2\varepsilon^2 + \cdots,\ j = 1, 2, 3.$$

Tarkime, kad $x_1^0 = x_2^0$ uždavinys singuliarusis ir $y_{1,2}(\varepsilon)$ reikia ieškoti tokiu pavidalu

$$y(\varepsilon) = x_1^0 + y^1\varepsilon^\alpha + y^2\varepsilon^{2\alpha} + \cdots$$

Lygties

$$\varepsilon x^{n+k} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,\ k > 0$$

nesutrikdytoji yra žemesnės eilės ir iš jos negalima rasti visų šaknų. Todėl uždavinys yra singuliarusis. Asimptotinei analizei keičiame kintamąjį: $x(\varepsilon) = \varepsilon^\alpha y(\varepsilon)$.

1.10 pavyzdys. $\varepsilon x^3 - x^2 - \varepsilon x + 1 = 0$.
Kadangi lygtį galima perrašyti taip
$(\varepsilon x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0$,
matome, kad negalima sukonstruoti šaknies $x = \dfrac{1}{\varepsilon}$ reguliariojo skleidinio (t. y. teigiamais ε laipsniais) pavidalu.

Uždaviniai

1. $x^3 - (6 + \varepsilon)x^2 + (11 + 2\varepsilon)x - 6 + \varepsilon^2 = 0$;
2. $x^3 - (4 + \varepsilon)x^2 + (5 - 2\varepsilon) - 2 + \varepsilon^2 = 0$;
3. $\varepsilon x^3 + x + 2\varepsilon = 0$.

1.3.4. Transcendenčiosios lygtys

1.11 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\tan x = x, \quad \text{kai } x \to +\infty.$$

Pažymėkime $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n + y(n)$, $\varepsilon = \left(\dfrac{\pi}{2}(2n+1)\right)^{-1}$. Taigi ε yra mažasis parametras, kai $n \to \infty$. Turime

$$\tan x = -\cot y = -\frac{1}{y} + \frac{y}{3} + \frac{y^3}{45} + \cdots = x = \frac{1}{\varepsilon} + y.$$

Ieškome asimptotinio sprendinio $y = -\varepsilon + y_2\varepsilon^2 + y_3\varepsilon^3 + \cdots$
Gauname $y_2 = 0$, $y_3 = -\dfrac{2}{3}$, $\cdots$. Todėl

$$x = \frac{\pi}{2}(2n+1) - \frac{2}{\pi(2n+1)} - \frac{16}{3\pi^3(2n+1)^3} + \cdots$$

1.12 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$xe^x = t, \quad \text{kai } t \to +\infty.$$

Pažymėję $\ln t = y$, perrašome lygtį

$$x + \ln x = y.$$

Kai $y \to +\infty$, turime $x \sim y$ ir ieškosime asimptotinio sprendinio iteracijų metodu:

$$x^{(n+1)} = y - \ln x^{(n)}, \; x^{(0)} = y.$$

Turime

$$x^{(1)} = y - \ln y,$$

$$x^{(2)} = y - \ln(y - \ln y) = y - \ln y\left(\left(1 - \frac{\ln y}{y}\right)\right) =$$

$$y - \ln y - \ln(\left(1 - \frac{\ln y}{y}\right) = y - \ln y + \frac{\ln y}{y} + \cdots .$$

Taigi turime

$$x(t) = \ln t - \ln(\ln t) + \frac{\ln(\ln t)}{\ln t} + \cdots$$

2 skyrius

Skleidinių konstravimo metodai

2.1. Darbu formulė

2.1.1. Darbu (Darboux, 1876) formulė

Tarkime, kad $f(x)$ yra diferencijuojama funkcija, $P_n(t)$ – n-tojo laipsnio polinomas. Pastebėkime, kad

$$\frac{d}{dt}\Big(-(z-a)P_n^{(n-1)}(t)f'(a+t(z-a))\Big)+$$

$$\frac{d}{dt}\Big((z-a)^2P_n^{(n-2)}(t)f''(a+t(z-a))\Big)-$$

$$\frac{d}{dt}\Big((z-a)^3P_n^{(n-3)}(t)f'''(a+t(z-a))\Big)+$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{d}{dt}\Big((z-a)^nP_n^{(0)}(t)f^{(n)}(a+t(z-a))\Big)=$$

$$-(z-a)\Big(P_n^{(n)}f'+(z-a)P_n^{(n-1)}f''\Big)+(z-a)^2\Big(P_n^{(n-1)}f''+(z-a)P_n^{(n-2)}f'''\Big)-$$

$$(z-a)^3\Big(P_n^{(n-2)}f'''+(z-a)P_n^{(n-3)}f^{(4)}\Big)+\cdots+(-1)^n(z-a)^n\Big(P_n'f^{(n)}+(z-a)P_n^{(0)}f^{(n+1)}\Big)=$$

$$-(z-a)P_n^{(n)}f'+(-1)^n(z-a)^{n+1}P_n^{(0)}f^{(n+1)}.$$

Perrašome reiškinį taip:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\frac{d^{n-m}P_n(t)}{dt^{n-m}}\cdot\frac{d^m f(a+t(z-a))}{dt^m}\right)=$$

$$-(z-a)\frac{d^nP_n(t)}{dt^n}\cdot\frac{d\,f(a+t(z-a))}{dx}+(-1)^n(z-a)^{n+1}P_n(t)\frac{d^{n+1}f(a+t(z-a))}{dx^{n+1}}.$$

Pastebėję, kad $\dfrac{d^nP_n(t)}{dt^n}=\dfrac{d^nP_n(0)}{dt^n}=const$ ir integruodami gautą reiškinį pagal kintamąjį t nuo 0 iki 1, gauname:

$$\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\left(P_n^{(n-m)}(1)f^{(m)}(z)-P_n^{(n-m)}(0)f^{(m)}(a)\right)=$$

$$-P_n^{(0)}(0)\left(f(z)-f(a)\right)+(-1)^n(z-a)^{n+1}\int_0^1 P_n(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))\,dt.$$

Šis reiškinys vadinamas Darbu formule:

$$P_n^{(n)}(0)\left(f(z)-f(a)\right)=$$

$$\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}(z-a)^m\left(P_n^{(n-m)}(1)f^{(m)}(z)-P_n^{(n-m)}(0)f^{(m)}(a)\right)+ \tag{2.1}$$

$$(-1)^n(z-a)^{n+1}\int_0^1 P_n(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))\,dt.$$

2.1 pavyzdys. $P_n(t)=(t-1)^n$, $P_n^{(n)}(0)=n!$,
kai $m<n$ turime $P_n^{(n-m)}(t)=n(n-1)\cdots(m+1)(t-1)^m$,
$P_n^{(n-m)}(1)=0$.

$$n!(f(z)-f(a))=$$

$$\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}(z-a)^m(-(n(n-1)\cdots(m+1))(-1)^m f^{(m)}(a)+$$

$$(-1)^n(z-a)^{n+1}\int_0^1(t-1)^n f^{(n+1)}(a+t(z-a))\,dt.$$

Pastebėję, kad

$$\frac{n(n-1)\cdots(m+1)}{n!}=\frac{n(n-1)\cdots(m+1)}{1\cdot 2\cdots m\cdot(m+1)\cdots n}=\frac{1}{m!},$$

turime Teiloro formulę

$$f(z)-f(a)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m+\frac{(-1)^n(z-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1(t-1)^n f^{(n+1)}(a+t(z-a))\,dt.$$

Kai $n\to\infty$ gauname Teiloro eilutę

$$f(z)-f(a)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m.$$

2.2 pavyzdys. $P_{2n}(t)=t^n(t-1)^n$. Kai $n\to\infty$ gauname

$$f(z)-f(a)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(z-a)^m}{2^m m!}\left(f^{(m)}(z)+(-1)^{m-1}f^{(m)}(a)\right).$$

2.1.2. Bernulio skaičiai ir daugianariai

2.1 apibrėžimas. Bernulio (1713) skaičiais B_n (n=0,1,...) vadinami šio skleidinio koeficientai

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}.$$

Pastebėkime, kad $B_n=\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)\Big|_{t=0}$.

Pridėkime $\frac{z}{2}$ prie reiškinio $\frac{z}{e^z-1}$:

$$\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=\frac{z}{2}\cdot\left(1+\frac{2}{e^z-1}\right)=\frac{z}{2}\cdot\frac{e^z+1}{e^z-1}=\frac{z}{2}\cdot\frac{e^{\frac{z}{2}}\left(e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}\right)}{e^{\frac{z}{2}}\left(e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}\right)}=\frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}.$$

Kadangi hiperbolinis kotangentas

$$\coth z=\frac{\cosh z}{\sinh z},\ \sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\ \cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

yra nelyginė funkcija:

$$(-z)\cdot\coth(-z)=(-z)\cdot(-\coth z)=z\coth z,$$

turime

$$z \coth z = \frac{2z}{e^{2z}-1} + \frac{2z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n B_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Remdamiesi gerai žinomomis formulėmis

$$\sin z = -i \sinh iz, \quad \cos z = \cosh iz,$$

gauname dar vieną formulę

$$z \cot z = \sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n B_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Iš čia galima gauti

$$\begin{gathered} B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6}, \\ B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = B_{2n-1} = 0, \\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Pastebėkime dar

$$\frac{t}{e^t-1}\cdot e^{tx} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} B_m\frac{t^m}{m!}\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m\cdot x^m}{m!}\right) =$$

$$1+(B_0x+B_1)\,t+\frac{1}{2!}\left(B_0x^2+2B_1x+B_2\right)t^2+\frac{1}{3!}\left(B_0x^3+3B_1x^2+3B_2x+B_3\right)t^3+\cdots$$

2.2 apibrėžimas. Bernulio daugianariai apibrėžiami formule

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}B_m x^{n-m}.$$

Pastebėkime, kad

$$B_n(0) = B_n.$$

Turime formulę

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(x)\frac{t^m}{m!}.$$

Iš čia išplaukia

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(B_m(x+1)-B_m(x)\right)\frac{t^m}{m!}=\frac{t\cdot e^{t(x+1)}}{e^t-1}-\frac{t\cdot e^{tx}}{e^t-1}=$$

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}\left(e^t-1\right)=te^{tx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}x^n}{n!}.$$

Taigi įrodėme formulę

$$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}.$$

Diferencijuojame Bernulio polinomą:

$$\frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}B_m x^{n-m}=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-m)!\,m!}(n-m)B_m x^{n-m-1}=$$

$$\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-1)!\,n}{(n-1-m)!\,m!}B_m x^{n-1-m}=n\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}B_m x^{n-1-m}=nB_{n-1}(x).$$

Gavome

$$B_n'(x)=nB_{n-1}(x).$$

Surašykime kelis pirmuosius Bernulio daugianarius:

$$B_0(x)=1,\ B_1(x)=x-\frac{1}{2},\ B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},$$

$$B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,\ B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}, \tag{2.3}$$

$$B_5(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}-\frac{1}{6}.$$

2.1.3. Oilerio – Makloreno formulė

Euler (1732), Maclaurin (1742).

Diferencijuojame rekurentinį sąryšį Bernulio polinomams:

$$B_n'(t+1)-B_n'(t)=\left(nt^{n-1}\right)'=n(n-1)t^{n-2}$$

$$B_n''(t+1)-B_n''(t)=n(n-1)(n-2)t^{n-3}$$

$$\dots$$

$$B_n^{(k)}(t+1) - B_n^{(k)}(t) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)t^{n-k-1}$$

Kai $t = 0$ ir $0 < k < n-1$, gauname $B_n^{(k)}(1) = B_n^{(k)}(0)$.
Kai $k = n-1$, turime $B_n^{(n-1)}(1) - B_n^{(n-1)}(0) = n!$.
Dar pastebėkime, kad $B_n^{(n)}(1) = B_n^{(n)}(0) = n!$. Remdamiesi anksčiau įrodyta formule $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$, gauname

$$B_n''(x) = n(n-1)B_{n-2}(x),\ B_n'''(x) = n(n-1)(n-2)B_{n-3}(x), \ldots,$$

$$B_n^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)B_{n-k}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}\,B_{n-k}(x).$$

Iš čia išplaukia

$$B_n^{(n-2k-1)}(0) = \frac{n!}{(2k+1)!}\,B_{2k+1}(0) = \frac{n!}{(2k+1)!}\,B_{2k+1} = 0,$$

$$B_n^{(n-2k)}(0) = \frac{n!}{(2k)!}\,B_{2k}(0) = \frac{n!}{(2k)!}\,B_{2k}.$$

Taikome Darbu (2.1) formulę:

$$\begin{gathered} n!(f(z)-f(a)) = \\ (z-a)\left(B_n^{(n-1)}(1)f'(z) - B_n^{(n-1)}(0)f'(a)\right) - \\ (z-a)^2\left(B_n^{(n-2)}(1)f''(z) - B_n^{(n-2)}(0)f''(a)\right) + \\ (z-a)^3\left(B_n^{(n-3)}(1)f'''(z) - B_n^{(n-3)}(0)f'''(a)\right) - \cdots + \\ (-1)^n\,(z-a)^n\left(B_n^{(0)}(1)f^{(n)}(z) - B_n^{(0)}(0)f^{(n)}(a)\right) + R_n(a,z), \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$R_n(a,z) = (-1)^n(z-a)^{n+1}\int_0^1 B_n(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))\,dt.$$

Atsižvelgiame į tai, kad $B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0$,
$B_n^{(k)}(1) = B_n^{(k)}(0) = \dfrac{n!B_{n-k}}{(n-k)!}$, kai $0 < k < n-1$,
$B_n^{(n-1)}(x) = n!B_1(x)$, $B_n^{(n-1)}(0) = -\dfrac{n!}{2}$, $B_n^{(n-1)}(1) = \dfrac{n!}{2}$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$.
Perrašome reiškinį taip:

$$f(z) - f(a) = \frac{(z-a)}{2}\left(f^{(1)}(z) + f^{(1)}(a)\right) -$$

$$\frac{(z-a)^2 B_2}{2!}\Big(f^{(2)}(z)-f^{(2)}(a)\Big)-\frac{(z-a)^4 B_4}{4!}\Big(f^{(4)}(z)-f^{(4)}(a)\Big)-$$
$$\cdots-\frac{(z-a)^{2k} B_{2k}}{(2k)!}\Big(f^{(k)}(z)-f^{(k)}(a)\Big)+\frac{(-1)^n}{n!}R_n(a,z).$$

Pastebėkime, kad

$$\frac{(z-a)}{2}\Big(f^{(1)}(z)+f^{(1)}(a)\Big)=(z-a)\cdot\big(f'(a)-B_1 f'(x)\big|_a^z\big)$$

ir pažymėkime $g(x)=f'(x)$. Tada $f(z)-f(a)=\int\limits_a^z g(x)\,d\,x$ ir galime perrašyti formulę

$$g(a)=\int_a^z g(x)\,d\,x+\sum_{m=1}^{n}\frac{(z-a)^m B_m}{m!}\,g^{(m-1)}(x)\Big|_a^z-\frac{(-1)^n}{n!}R_n(a,z).$$

Paimkime $z=a+1$:

$$g(a)=\int_a^{a+1} g(x)\,d\,x+\sum_{m=1}^{n}\frac{B_m}{m!}\,g^{(m-1)}(x)\Big|_a^{a+1}-\frac{(-1)^n}{n!}R_n(a,a+1).$$

Keičiame a į $a+1$ ir sumuojame reiškinius:

$$g(a)+g(a+1)+g(a+2)+\cdots g(a+k)=\sum_{s=0}^{k}g(a+s)=$$
$$\int_a^b g(x)\,d\,x+\sum_{m=1}^{n}\frac{B_m}{m!}\,g^{(m-1)}(x)\Big|_a^b+ \tag{2.5}$$
$$\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^1 B_n(t)g^{(n)}(a+t(b-a))\,d\,t.$$

Čia $b=a+k+1$, $k=0,1,\ldots$

2.3 pavyzdys. Tarkime, kad Oilerio – Makloreno (2.5) formulėje $a=0$, $b=1$ ir $n=1$. Patikrinkime lygybę

$$g(0)=\int_0^1 g(x)\,d\,x+B_1\,g(x)\Big|_0^1+\int_0^1 B_1(t)\,g'(t)\,d\,t$$

Perrašome reiškinį

$$g(0)+\frac{1}{2}\,(g(1)-g(0))=\int_0^1 g(x)\,d\,x+\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)g'(t)\,d\,t$$

ir taikome integravimo dalimis formulę:

$$\frac{g(1)+g(0)}{2} = \int_0^1 g(x)\,d\,x + \left(t - \frac{1}{2}\right) g(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 g(t)\,d\,t.$$

Taigi šiuo atveju formulė yra teisinga.

2.4 pavyzdys. Tarkime, kad Oilerio – Makloreno (2.5) formulėje $g(x) = x$, $a = 0$, $b = k+1$ ir $n > 1$. Turime $g'(x) = 1$, $g^{(m)}(x) = 0$, $m > 1$ ir

$$\sum_{s=0}^{k} s = \int_0^{k+1} x\,d\,x + B_1\,x\Big|_0^{k+1} = \frac{(k+1)^2}{2} - \frac{k+1}{2}.$$

Arba

$$0 + 1 + \cdots + k = \frac{(k+1)}{2}(k+1-1) = \frac{(k+1)k}{2}.$$

Tai yra gerai žinoma aritmetinės progresijos sumos formulė.

2.5 pavyzdys. Paimkime $g(x) = x^2$, $a = 0$, $b = k+1$ ir $n > 2$. Turime $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$, $g^{(m)}(x) = 0$, $m > 2$ ir

$$\sum_{s=0}^{k} s^2 = \int_0^{k+1} x^2\,d\,x + B_1\,x^2\Big|_0^{k+1} + \frac{B_2}{2}\,2x\Big|_0^{k+1} =$$

$$\frac{(k+1)^3}{3} - \frac{(k+1)^2}{2} + \frac{k+1}{6}.$$

Taigi gavome formulę $1 + 4 + 9 + \cdots + (n-1)^2 = \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{6}$.

2.1.4. Harmoninių skaičių asimptotika

Harmoniniais skaičiais vadinamos sumos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n.$$

Paimkime funkciją $g(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $g''(x) = \frac{2}{x^3}$, $g'''(x) = -\frac{2\cdot 3}{x^4}$.
Bendruoju atveju

$$\frac{d^k}{d\,x^k}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}.$$

Taikome Oilerio – Makloreno (2.5) formulę:

$$\sum_{s=1}^{n-1}\frac{1}{s} = H_{n-1} = \int_1^n \frac{dx}{x} + \sum_{k=1}^{m}\frac{B_k(k-1)!(-1)^{k-1}}{k!x^k}\Bigg|_1^n + R_m =$$

$$\ln n + \frac{B_1}{x}\Bigg|_1^n - \frac{B_2}{2x^2}\Bigg|_1^n - \frac{B_4 3!}{4!x^4}\Bigg|_1^n + \cdots =$$

$$\ln\, n + \gamma - \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + \cdots$$

Pastebėkime, kad $H_{n-1} + \frac{1}{n} = H_n$ ir $-\frac{1}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2n}$. Taigi

$$H_n = \ln\, n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Čia $\gamma = 0,5772156649\ldots$ Oilerio – Maskeronio konstanta.
Kai $n = 5$ apytiksliai gauname

$$\gamma \approx H_5 - \ln 5 - \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{12\cdot 5^2} =$$

$$(1 + 0,5 + 0,33333 + 0,25 + 0,2) - 1,60944 - 0,1 + 0,00333 =$$

$$2,28333 - 1,70611 \approx 0,5772$$

2.1 pratimas. Įrodykite, kad formulės paklaida $R_m = O\left(\frac{1}{m^6}\right)$.

2.1.5. Stirlingo formulė

Paimkime Oilerio – Makloreno (2.5) formulėje $g(x) = \ln x$:

$$\sum_{s=1}^{n-1}\ln s = \int\limits_1^n \ln x\, d\,x + B_1 \ln x\Bigg|_1^n + \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}(2k-2)!}{(2k!)x^{2k-1}}\Bigg|_1^n + R_m.$$

Integruodami dalimis gauname

$$\int_1^n \ln x\,dx = x\ln x|_1^n - \int_1^n \frac{x\,dx}{x} = n\,\ln n - n + 1.$$

Todėl

$$\sum_{s=1}^{n-1} \ln s = n\,\ln n - n + \sigma - \frac{\ln n}{2} + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \cdots$$

Stirlingo konstanta $\sigma = \ln\sqrt{2\pi}$.

Iš čia gauname

$$\ln n! = \sum_{s=1}^{n-1} \ln s + \ln n = \ln n\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \sigma + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Todėl

$$e^{\ln n!} = n! = \frac{e^{\ln n\left(n+\frac{1}{2}\right)}e^{\sigma}}{e^n}\;e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\cdots} =$$

$$\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^n}\cdot\left(1+\left(\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}\right)^2+\cdots\right)$$

Iš čia gauname Stirlingo formulę

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).$$

2.2. Biūrmano formulė

Bürmann (1799)

2.2.1. Formulės išvedimas

Tarkime, kad $f(z)$ ir $\varphi(z)$ – analizinės taško $z = a$ aplinkoje funkcijos, γ – uždaras kontūras,

$$\psi(z) = \frac{z-a}{\varphi(z)-b}.$$

Pastebėję, kad $f(z)-f(a)=\int\limits_a^z f'(\zeta)\,d\,\zeta$,

$$\oint\limits_\gamma \frac{\varphi'(\nu)\,d\,\nu}{\varphi(\nu)-\varphi(\zeta)}=\oint\limits_\gamma \frac{d\,(\varphi(\nu)-\varphi(\zeta))}{\varphi(\nu)-\varphi(\zeta)}=2\pi i$$

ir taikydami geometrinės progresijos sumos formulę
$(1+x+x^2+\cdots+x^{n-2}=\frac{x^{n-1}-1}{x-1})$

$$\frac{1}{A-C}=\frac{1}{(A-B)\left(1-\frac{C-B}{A-B}\right)}=$$

$$\frac{1}{A-B}\left(\sum_{m=0}^{n-2}\left(\frac{C-B}{A-B}\right)^m+\frac{1}{1-\frac{C-B}{A-B}}-\frac{1-\left(\frac{C-B}{A-B}\right)^{n-1}}{1-\frac{C-B}{A-B}}\right)=$$

$$\frac{1}{A-B}\left(\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{C-B}{A-B}\right)^k+\frac{(C-B)^{n-1}}{(A-B)^{n-2}(A-C)}\right),$$

$(A=\varphi(\nu),\ B=b,\ C=\varphi(\zeta))$ gauname

$$f(z)-f(a)=\int_a^z f'(\zeta)\,d\,\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_0^z\oint\limits_\gamma \frac{f'(\zeta)\varphi'(\nu)\,d\,\zeta\,d\,\nu}{\varphi(\nu)-\varphi(\zeta)}= \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^z\oint\limits_\gamma \frac{f'(\zeta)\varphi'(\nu)}{\varphi(\zeta)-b}\left(\sum_{m=0}^{n-2}\left(\frac{\varphi(\zeta)-b}{\varphi(\nu)-b}\right)^m+\right.$$

$$\left.\frac{(\varphi(\zeta)-b)^{n-1}}{(\varphi(\nu)-b)^{n-2}\,(\varphi(\nu)-\varphi(\zeta))}\right)d\,\zeta\,d\,\nu.$$

Keičiame integravimo tvarką ir taikome žinomą formulę
$\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma \dfrac{g(\nu)\,d\nu}{(\nu-z)^{m+1}}=m!g^{(m)}(z)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^z\oint\limits_\gamma \left(\frac{\varphi(\zeta)-b}{\varphi(\nu)-b}\right)^m\frac{f'(\nu)\varphi'(\zeta)\,d\,\zeta\,d\,\nu}{\varphi(\nu)-b}=$$

$$\frac{(\varphi(\zeta)-b)^{m+1}}{m+1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma f'(\nu)\left(\frac{\psi(\nu)}{\nu-a}\right)^{m+1}d\,\nu=$$

$$\frac{(\varphi(\zeta)-b)^{m+1}}{(m+1)!}\cdot\frac{d^m}{da^m}\left(f'(a)(\psi(a))^{m+1}\right).$$

Taigi keisdamį m į $m-1$ gauname Biūrmano formulę

$$f(z)=f(a)+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(\varphi(z)-b)^m}{m!}\cdot\frac{d^{m-1}}{da^{m-1}}\left(f'(a)(\psi(a))^m\right)+R_n, \qquad (2.7)$$

$$R_n=\frac{1}{2\pi i}\int_a^z\oint_\gamma\left(\frac{\varphi(\nu)-b}{\varphi(\zeta)-b}\right)^{n-1}\frac{f'(\nu)\varphi'(\nu)}{\varphi(\nu)-\varphi(\zeta)}\,d\zeta\,d\nu.$$

Pastebėkime, kad iš (2.7) formulės išplaukia Teiloro formulė, jei $\varphi(z)-b=z-a$.

Dar kartą suformuluokime gautą rezultatą. Turime analizines funkcijas

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(z-a)^2+\cdots,$$

$$\varphi(z)=b+\varphi'(a)(z-a)+\frac{1}{2!}\varphi''(a)(z-a)^2+\cdots$$

Tada skleidinio

$$f(z)=f(a)+c_1(\varphi(z)-b)+\frac{c_2}{2!}(\varphi(z)-b)^2+\frac{c_3}{3!}(\varphi(z)-b)^3+\cdots$$

koeficientus randame iš formulių

$$c_m=\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f'(z)\left(\frac{z-a}{\varphi(z)-b}\right)^m\right)\Bigg|_{z=a}$$

2.2.2. Lagranžo apgrąžos formulė

Tarkime, kad funkcija $\varphi(\eta)$ analizinė taško $\eta=0$ aplinkoje. Nagrinėsime lygtį

$$\eta=a+t\varphi(\eta),\ \ t\to 0. \qquad (2.8)$$

Tarkime, kad funkcija $f(z)$ yra analizinė taško $z=a$ aplinkoje. Tada (2.8) lygties sprendiniui $\varphi(\eta)$, kai $t\to 0$ galioja Lagranžo apgrąžos formulė (Lagrange, 1770)

$$f(\eta)=f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\cdot\frac{d^{n-1}}{d\,a^{n-1}}\left(f'(a)\,(\varphi(a))^n\right). \qquad (2.9)$$

Sukonstruokime lygties

$$\eta = t\varphi(\eta), \quad \text{kai } t \to 0$$

asimptotinį sprendinį. Paimkime Lagranžo formulėje $a = 0$, $\varphi(\eta) = \eta$. Tada

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\,\eta} \left(\varphi(0)\right)^n .$$

2.6 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$w = \frac{z}{\cos z}, \ w \to 0.$$

Taikome formulę:

$$z(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\,\eta} \left(\cos(0)\right)^n =$$

$$w\cos 0 + \frac{w^2}{2} \left(\cos^2 w\right)'\Big|_{w=0} + \frac{w^3}{6} \left(\cos^3 w\right)''\Big|_{w=0} + \cdots =$$

$$w - \frac{w^3}{12} + \cdots$$

2.1 pastaba. Tą patį rezultatą gausime ir neapibrėžtųjų koeficientų metodu:

$$w = \frac{c_1 w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + \cdots}{1 - \frac{1}{2}\left(c_1 w + c_2 w^2 + \cdots\right)^2 + \frac{1}{24}\left(c_1 w + c_2 w^2 + \cdots\right)^4 + \cdots}.$$

2.3. Gama funkcija

2.3.1. Gama funkcijos apibrėžimas

Gamą funkciją Vejerštrasas (Weierstrass, 1856) apibrėžė taip:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right).$$

Čia $\gamma = 0,5772156649\ldots$ Oilerio (Euler) – Mackeronio (Mascheroni) konstanta.

Harmoniniais skaičiais vadinamos harmoninės eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ dalinės sumos:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Kadangi harmoninė eilutė diverguoja, turime $H_n \to \infty$, kai $n \to \infty$.

Pažymėkime

$$u_n = \int_0^1 \frac{t\,dt}{n(n+t)} = \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}.$$

Turime $0 \leqslant u_n \leqslant \int\limits_0^1 \dfrac{dt}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}$. Todėl eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ konverguoja ir

$$\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k + \ln\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Taigi įrodėme, kad toks apibrėžimas yra korektiškas:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n)\,.$$

Taikome begalinės sandaugos apibrėžimą:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\left(\lim_{n\to\infty} e^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)z}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right)\right) =$$

$$z\lim_{n\to\infty}\left(e^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)z}\cdot\left(1+\frac{z}{1}\right)e^{-\frac{z}{1}}\cdot\left(1+\frac{z}{2}\right)e^{-\frac{z}{2}}\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right) =$$

$$z\lim_{n\to\infty}\left(n^{-z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right)$$

Iš čia išplaukia, kad (kai $z \neq 0$, $z \neq -1$, $z \neq -2$, $\ldots$)

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{\frac{z(1+z)(2+z)\cdots(n+z)}{1\cdot 2\cdots n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(1+z)(2+z)\cdots(n+z)}.$$

Pastebėję, kad

$$n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n}{n-1} =$$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) =$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1},$$

gauname Oilerio (Euler, 1729) formulę Gama funkcijai
$(z \neq 0,\ z \neq 1,\ z \neq 2,\ \ldots)$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^z}{1 + \frac{z}{k}} = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}{1 + \frac{z}{n}}.$$

2.3.2. Gama funkcijos savybės

Kai z nėra sveikasis neigiamas skaičius galime gauti

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \frac{\frac{1}{z+1}\left(\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z+1}}{1+\frac{z+1}{k}}\right)}{\frac{1}{z}\left(\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}}{1+\frac{z}{k}}\right)} =$$

$$\frac{z}{z+1} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)(z+k)}{z+k+1}.$$

Pastebėkime, kad

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)(z+k)}{z+k+1} =$$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{1}\right)(z+1)}{z+1+1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)(z+2)}{z+2+1} \cdots \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)(z+n)}{z+n+1} =$$

$$\frac{(z+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{z+1+n} = \frac{n+1}{z+n+1}.$$

Todėl

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = z \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{z+n+1} = z.$$

Taigi įrodėme rekurentinį sąryšį

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z). \tag{2.10}$$

Kadangi $\Gamma(1) = 1$, turime

$$\Gamma(n) = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) = (n-1)\,!$$

2.3.3. Gama funkcijos reiškimas integralu

Parodykime, kad gama funkcija išreiškiama tokiu integralu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt. \tag{2.11}$$

Pastebėję, kad

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n,$$

turime

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt.$$

Keičiame kintamąjį
$z = \dfrac{t}{n}$, $dt = n\,dz$, $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = (1-z)^n$, $t^{x-1} = \dfrac{n^x}{n}\, z^{x-1}$:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt = \lim_{n\to\infty} n^x \int_0^1 (1-z)^n z^{x-1}\,dz =$$

$$\lim_{n\to\infty} n^x \left((1-z)^n \left. \frac{z^x}{x} \right|_0^1 + \frac{n}{x} \int_0^1 (1-z)^{n-1} z^x\,dz \right) = \cdots =$$

$$\lim_{n\to\infty} n^x \left(\frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \int_0^1 z^{x+n-1}\,dz \right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

2.3.4. Nepilnoji Gama funkcija

Pažymėkime

$$\gamma(a,x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1}\,dt, a > 0. \tag{2.12}$$

Šį integralą vadinsime **nepilnąja gama funkcija**. Integralas

$$\Gamma(a,x)=\int_x^{\infty} e^{-t}t^{a-1}\,dt, a>0 \tag{2.13}$$

vadinamas **papildomąja nepilnąja gama funkcija**.

Pastebėkime, kad gama funkcija reiškiama taip:

$$\Gamma(a)=\gamma(a,x)+\Gamma(a,x). \tag{2.14}$$

Įstatome į (2.12) integralą funkcijos e^{-t} Makloreno (Maclaurin) eilutę:

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,t^{n+a-1}\right)dt=x^a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!\,(n+a)}.$$

Iš čia išplaukia

$$\Gamma(a,x)=\Gamma(a)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!\,(n+a)}.$$

Rasime funkcijos $\Gamma(a,x)$ asimptotiką, kai $x\to\infty$. Integruojame dalimis:

$$\Gamma(a,x)=\int_x^{\infty}e^{-t}t^{a-1}\,dt=-\,e^{-t}t^{a-1}\Big|_x^{\infty}+(a-1)\int_x^{\infty}e^{-t}t^{a-2}\,dt=$$

$$e^{-x}x^{a-1}+(a-1)\int_x^{\infty}e^{-t}t^{a-2}\,dt=$$

$$e^{-x}x^{a-1}+(a-1)\,e^{-x}x^{a-2}+(a-1)(a-2)\int_x^{\infty}e^{-t}t^{a-3}\,dt.$$

Taigi

$$\Gamma(a,x)\sim e^{-x}x^{a-1}\left(1+\frac{a-1}{x}+\frac{(a-1)\,(a-2)}{x^2}+\cdots\right).$$

Iš čia, kai $a=n+1$, gauname

$$\Gamma(n+1,x)=n!\,x^n\,e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{-k}}{(n-k)!}=n!\,e^{-x}\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}.$$

3 skyrius

Integralų asimptotikos

3.1. Tiesioginiai skleidiniai

3.1.1. Tiesioginio integravimo pavyzdžiai

3.1 pavyzdys. Nagrinėsime integralą

$$J(\varepsilon) = \int\limits_0^1 \cos \varepsilon x^3 \, dx, \text{ kai } \varepsilon \to 0.$$

Skleidžiame kosinusą Makloreno eilute

$$\cos \varepsilon x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\varepsilon x^3\right)^{2n}}{(2n)!}$$

ir integruojame:

$$J(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 x^{6n} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon^{2n}}{(2n)! \, (6n+1)}.$$

Taigi

$$J(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{14} + \frac{\varepsilon^4}{312} - \cdots$$

Pastebėkime, kad eilutė konverguoja $\forall \varepsilon \in R$.

3.1.2. Tikimybės integralo asimptotika

Tikimybės integralu vadinamas

$$\mathbf{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Skleidžiame pointegralinę funkciją Makloreno eilute ir integruojame:

$$\mathbf{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{x} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}.$$

Taigi turime

$$\mathbf{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right) + O\left(x^7\right), \text{ kai } x \to 0.$$

3.1 pastaba. Parodykime, kad

$$\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pažymėkime

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Tada

$$I^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right) \cdot \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

Pereiname prie polinių koordinačių $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ir taikome formulę:

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\; r\; dr\, d\varphi.$$

Taigi

$$I^2 = \lim_{r\to+\infty} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r} re^{-r^2}\, dr = \frac{2\pi}{2} \left(-e^{-r^2}\right)\Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

3.2. Integravimas dalimis

3.2.1. Laplaso transformacijos asimptotika

Nagrinėsime integralą

$$L[f](x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\,dt$$

kai $x \to \infty$.

Pažymėkime $u = f(t)$, $dv = e^{-xt}\,dt$. Tada $du = f'(t)\,dt$, $v = -\frac{e^{-xt}}{x}$ ir taikome integravimo dalimis formulę

$$\int\limits_0^\infty u\,dv = u\,v\Big|_0^\infty - \int_0^\infty v\,du :$$

$$L[f](x) = -\frac{e^{-xt}}{x}\,f(t)\Big|_0^\infty + \frac{1}{x}\int\limits_0^\infty e^{-xt} f'(t)\,dt$$

Iš čia gauname

$$L[f](x) = \frac{f(0)}{x} + \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-xt} f'(t)\,dt.$$

Dar kartą integruojame dalimis:

$$L[f](x) = \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int_0^\infty e^{-xt} f''(t)\,dt.$$

Taigi kai $f(t) \in C^{n+1}\,[0, +\infty]$ ir visi netiesioginiai integralai $\int\limits_0^\infty e^{-xt} f^{(k)}(t)\,dt$ $(k = 0, 1, \cdots, n+1)$ konverguoja, turime

$$L[f](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{x^{n+1}} + O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right),\ x \to \infty.$$

3.2.2. Furjė integralas

Nagrinėsime integralą

$$I(x) = \int_a^b e^{ixt} f(t)\,dt,\ x \to +\infty. \tag{3.1}$$

Integruojame dalimis:

$$I(x) = \frac{1}{ix}\int_a^b f(t)\,d\,e^{ixt} = \frac{1}{ix}\left(f(b)e^{ixb} - f(a)e^{ixa} - \int_a^b e^{ixt} f'(t)\,dt\right) =$$

$$\frac{i}{x}\left(e^{iax}f(a) - e^{ibx}f(b)\right) + \frac{i}{x}I'(x).$$

Čia pažymėta

$$I'(x) = \int_a^b e^{ixt} f'(t)\,dt.$$

Taikome šią formulę integralui $I'(x)$:

$$I'(x) = \frac{i}{x}\left(e^{iax}f'(a) - e^{ibx}f'(b)\right) + \frac{i}{x}I''(x).$$

Taigi

$$I(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{x}\right)^{n+1}\left(e^{iax}f^{(n)}(a) - e^{ibx}f^{(n)}(b)\right).$$

3.2.3. Vatsono lema

3.1 lema. (Watson, 1918) Tarkime, kad

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\frac{n+\lambda-\mu}{\mu}}, \ \lambda, \mu > 0, \ t \to +0$$

ir integralas

$$I(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-xt} f(t)\,dt, \ x > 0$$

konverguoja. Tada

$$I(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\mu}\right)\frac{a_n}{x^{\frac{n+\lambda}{\mu}}}, \ x \to +\infty.$$

3.2.4. Frenelio integralai

Frenelio integralais vadinami

$$C(z) = \int\limits_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\,dt, \ S(z) = \int\limits_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\,dt.$$

Keičiant integravimo kintamąjį $u = \frac{\pi}{2}t^2$, $dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{du}{\sqrt{u}}$, gauname

$$C(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}z^2} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du,\ \ S(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}z^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du.$$

Pastebėję, kad gauti reiškiniai yra realioji ir menamoji dalis integralo

$$F(x,a) = \int_x^\infty e^{it} t^{-a}\, dt, \tag{3.2}$$

integruodami dalimis
($u = t^{-a}$, $dv = e^{it}\, dt$, $du = -at^{-a-1}$, $v = \frac{e^{it}}{i}$) ir keisdami $\dfrac{1}{i} = -i$,
gauname

$$F(x,a) = \frac{i\, e^{ix}}{x^a} - iaF(x, a+1).$$

Dar kartą taikome formulę:

$$F(x,a) = \frac{i\, e^{ix}}{x^a} - ia\left(\frac{i\, e^{ix}}{x^{a+1}} - i(a+1)\, F(x, a+2)\right) =$$

$$\frac{i\, e^{ix}}{x^a} + \frac{a\, e^{ix}}{x^{a+1}} - a(a+1)\, F(x, a+2).$$

Pažymėkime

$$f(z) = \left(\frac{1}{2} - S(z)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) - \left(\frac{1}{2} - C(z)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} z^2\right), \tag{3.3}$$

$$g(z) = \left(\frac{1}{2} - C(z)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) + \left(\frac{1}{2} - S(z)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} z^2\right). \tag{3.4}$$

Pastebėkime, kad

$$C(z) = \frac{1}{2} + f(z) \sin\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) - g(z) \cos\left(\frac{\pi}{2} z^2\right),$$

$$S(z) = \frac{1}{2} - f(z) \cos\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) - g(z) \sin\left(\frac{\pi}{2} z^2\right).$$

3.1 pratimas. *Įrodykite formules ($z \to \infty$)*

$$f(z) \sim \frac{1}{\pi z}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (4n-1)}{(\pi z^2)^{2n}}\right),$$

$$g(z) \sim \frac{1}{\pi z}\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (4n+1)}{(\pi z^2)^{2n+1}}\right).$$

Pažymėkime

$$\mathbf{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,dt = 1 - \mathbf{erf}(x).$$

Funkcija $\mathbf{erfc}(x)$ vadinama **papildomuoju tikimybės integralu**.

Funkcija

$$F(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{t^2}\,dt$$

vadinama Dosono integralu.

Pastebėkime, kad

$$F(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i}\, e^{-z^2} \mathbf{erf}(iz),$$

$$C(z) + iS(z) = \frac{1}{2}\,(1+i)\,\mathbf{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,(1-i)\,z\right).$$

3.2 pratimas. Įrodykite asimptotinę formulę $(x \to \infty)$

$$\sqrt{\pi} x e^{x^2} \mathbf{erfc}(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(2x^2)^n}.$$

3.2.5. Integralinis sinusas ir kosinusas

Integralinis sinusas ir integralinis kosinusas apibrėžiami taip:

$$\mathbf{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t}\,dt, \;\; \mathbf{si}(z) = \mathbf{Si}(z) - \frac{\pi}{2},$$

$$\mathbf{Ci}(z) = \gamma + \ln z + \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t}\,dt.$$

Pažymėkime

$$f(z) = \mathbf{Ci}(z)\,\sin z - \mathbf{si}(z)\,\cos z,$$

$$g(z) = -\mathbf{Ci}(z)\,\cos z - \mathbf{si}(z)\,\sin z.$$

3.3 pratimas. *Įrodykite formules $(z \to \infty)$*

$$f(z) \sim \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2!}{z^2} + \frac{4!}{z^4} - \frac{6!}{z^6} + \cdots\right),$$

$$g(z) \sim \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{3!}{z^2} + \frac{5!}{z^4} - \frac{7!}{z^6} + \cdots\right).$$

3.3. Laplaso metodas

3.3.1. Metodo idėja

Nagrinėsime integralą

$$I(x) = \int_a^b e^{-xp(t)} f(t)\, dt, \tag{3.5}$$

kai a, b, $p(t)$, $f(t)$ nepriklauso nuo teigiamo parametro x. Integravimo intervalas $[a, b]$ gali būti begalinis.

Tarkime, kad $(\forall t \in [a, b])\ p'(t) > 0$ ir $f(t) \neq 0$. Tada taške $t = a$ funkcija $p(t)$ įgyja mažiausią reikšmę ir kai $x \to +\infty$, pagrindinę įtaką integralui $I(x)$ sąlygoja taško $t = a$ aplinka. Taigi Laplaso metodo (1820) idėja – atskirai nagrinėti intervalą $[a, a + \delta]$.

Pažymėkime

$$I_\delta(x) = \int_a^{a+\delta} e^{-xp(t)} f(t)\, dt.$$

Kai $x \to +\infty$ ir δ yra mažas, turime

$$I_\delta(x) \sim \int_a^{a+\delta} e^{-x(p(a)+p'(a)(t-a))} f(t)\, dt =$$

$$e^{-p(a)x} \int_a^{a+\delta} e^{-xp'(a)(t-a)} f(t)\, dt =$$

$$e^{-p(a)x} \left(-\frac{1}{xp'(a)} \int_a^{a+\delta} f(t)\, d\, e^{-xp'(a)(t-a)} \right) =$$

$$e^{-p(a)x} \left(- \left. \frac{f(t)e^{-xp'(a)(t-a)}}{xp'(a)} \right|_a^{a+\delta} + \int_a^{a+\delta} e^{-xp'(a)(t-a)} f'(t)\, dt \right)$$

Pastebėję, kad $(\forall \delta > 0)$

$$\frac{f(a+\delta)e^{-xp'(a)\delta}}{xp'(a)} = o\,(1)\,,\ \ x \to +\infty,$$

turime

$$I(x) \sim I_\delta(x) \sim \frac{f(a)e^{-xp(a)}}{xp'(a)}.$$

Formulė gauta esant prielaidai $p'(a) > 0$.

3.4 pratimas. Išnagrinėkite (3.5) integralą, kai $(\forall t \in [a, b])\ p'(t) < 0$.

Tarkime, kad $p'(a) = 0$ ir $p''(a) > 0$. Tada taške $t = a$ funkcija $p(t)$ turi lokalųjį minimumą ir kai $t \in [a, a + \delta]$

$$p(t) \sim p(a) + \frac{1}{2}(t-a)^2 p''(a).$$

Taigi

$$I(x) \sim I_\delta(x) \sim e^{-xp(a)} \int\limits_a^{a+\delta} e^{-x\frac{1}{2}(t-a)^2 p''(a)} f(t)\, dt.$$

3.3.2. Laplaso metodo pagrindimas

3.2 lema. Tarkime, kad $-\infty < a < b < +\infty$, $\alpha < \beta$, $f(t) \in C\,[a, b]$. Tada

$$\int\limits_a^b e^{-\alpha x t} f(t)\, dt = o\left(\int\limits_a^b e^{-\beta x t} f(t)\, dt\right), \quad \text{kai } x \to +\infty.$$

3.2 pastaba. 3.2 lemos teiginys galioja, kai $\alpha < 0$ ir kai $\alpha > 0$.

3.3 lema. Tarkime, kad $0 < \alpha < \beta$, $f(t) \in C\,[0, +\infty]$ ir $|f(t)| < C < \infty$. Tada

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x t} f(t)\, dt = o\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x t} f(t)\, dt\right), \quad \text{kai } x \to +\infty.$$

3.4 lema. Tarkime, kad $-\infty < a < \kappa \leqslant b < +\infty$, $p(t) \in C^1\,[a, b]$, $f(t) \in C\,[a, b]$ ir $p'(t) > 0$. Tada

$$\int\limits_\kappa^b e^{-xp(t)} f(t)\, dt = o\left(e^{-p(a)x}\right), \quad \text{kai } x \to +\infty.$$

3.5 lema. Tarkime, kad $p'(t) > 0$, $t \in [a, \kappa]$, $p'(t)$, $f(t) \in C[a, \kappa]$. Tada

$$\int_a^\kappa e^{-xp(t)} f(t)\, dt = e^{-p(a)x} \int_0^\gamma e^{-x\tau} g(\tau)\, d\tau.$$

Čia $\gamma = p(\kappa) - p(a)$, $g(\tau) = \left.\frac{f(t)}{p'(t)}\right|_{t=p^{-1}(\tau+p(a))}$.

Įrodymas. Keičiame integravimo kintamąjį $\tau = p(t) - p(a)$. Funkcija $p(t)$ yra didėjančioji, kadangi $p'(t) > 0$. Todėl galima išreikšti $t = p^{-1}(\tau + p(a))$ ir $dt = \frac{d\tau}{p'(t)}$. Taigi pertvarkome integralą ir keičiame integravimo rėžius:

$$\int_a^\kappa e^{-xp(t)} f(t)\, dt = e^{-p(a)x} \int_a^\kappa e^{-xp(t)+xp(a)} f(t)\, dt =$$

$$e^{-p(a)x} \int_a^\kappa e^{-x(p(t)-p(a))} f(t)\, dt = e^{-p(a)x} \int_0^\gamma e^{-x\tau} g(\tau)\, d\tau.$$

3.1 teorema. Tarkime, kad

1) Funkcijos $p'(t)$ ir $f(t)$ tolydžiosios, kai $t \in (a, b)$.

2) $p'(t) > 0$.

3) $p(t) - p(a) \sim p_0(t-a)^\mu$,
$p'(t) \sim \mu p_0 (t-a)^{\mu-1}$,
$f(t) - f(a) \sim f_0(t-a)^\nu$, $t \to a+0$.

4) Integralas
$$I(x) \equiv \int_a^b e^{-xp(t)} f(t)\, dt$$
absoliučiai konverguoja.

Tada
$$I(x) \sim \frac{f_0}{\mu} \Gamma\left(\frac{\nu}{\mu}\right) \frac{e^{-p(a)x}}{(p_0 x)^{\frac{\nu}{\mu}}}, \quad \text{kai } x \to \infty.$$

Įrodymas. Taikydami 3.4 lemą (54 psl.), nagrinėjame integravimo intervalą $[a, \kappa] \subset [a, b]$. Kartojame 3.5 lemos (55 psl.) įrodymo žymėjimus. Tada

$$\tau \sim p_0(t-a)^\mu, \; g(\tau) \sim \frac{f_0 \tau^{\frac{\nu}{\mu}-1}}{\mu p_0^{\frac{\nu}{\mu}}}, \; \tau \to +0.$$

Taigi

$$\int_a^b e^{-xp(t)} f(t)\,dt = \frac{f_0 e^{-p(a)x}}{\mu p_0^{\frac{\nu}{\mu}}} \int\limits_0^{\gamma} e^{-x\tau}\tau^{\frac{\nu}{\mu}-1}\,d\tau + o\left(e^{-p(a)x}\int\limits_0^{\gamma} e^{-x\tau}\tau^{\frac{\nu}{\mu}-1}\,d\tau\right).$$

Kadangi iš 3.4 lemos išplaukia, kad

$$\int\limits_0^{\gamma} e^{-x\tau}\tau^{\frac{\nu}{\mu}-1}\,d\tau \sim \int\limits_0^{+\infty} e^{-x\tau}\tau^{\frac{\nu}{\mu}-1}\,d\tau,$$

keisdami integravimo kintamąjį $y = x\tau$, $\tau = \frac{y}{x}$, $d\tau = \frac{dy}{x}$, turime

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x\tau}\tau^{\frac{\nu}{\mu}-1}\,d\tau = \frac{1}{x^{\frac{\nu}{\mu}-1}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-y} y^{\frac{\nu}{\mu}-1}\,dy = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{x^{\frac{\nu}{\mu}-1}}.$$

Suformuluokime 3.1 teoremos (55 psl.) apibendrinimą. Tarkime, kad galioja 3.1 teoremos sąlygos ir papildomai, kai $t \to a+0$, turime

$$p(t) \sim p(a) + \sum_{k=0}^{\infty} p_k (t-a)^{k+\mu},$$

$$p'(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (k+\mu) p_k (t-a)^{k+\mu-1},$$

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k (t-a)^{k+\nu-1}.$$

Tada galioja asimptotinis skleidinys

$$\int\limits_a^b e^{-xp(t)} f(t)\,dt \sim e^{-xp(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{k+\nu}{\mu}\right) \frac{a_k}{x^{\frac{k+\nu}{\mu}}},\ x \to +\infty,$$

$$a_0 = \frac{f_0}{\mu p_0^{\frac{\nu}{\mu}}},\ a_1 = \left(\frac{f_1}{\mu} - \frac{(\nu+1)p_1 f_0}{\mu^2 p_0}\right) \frac{1}{p_0^{\frac{\nu+1}{\mu}}}.$$

3.3.3. Laplaso metodo taikymai

3.2 pavyzdys. Raskime integralo

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t} \cos t \, dt$$

asimptotiką, kai $x \to +\infty$.

Funkcija $p(t) = \sin t$ įgyja minimumą taške $t = 0$. Turime, $p(t) = \sin t \sim t$, $\cos t \sim 1$ ir

$$I(x) \sim \int_0^{\delta} e^{-xt} \, dt \sim \frac{1}{x}.$$

Pastebėkime, kad $I(x) = \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{x}$.

3.3 pavyzdys. Raskime integralo

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t} \cos t \, dt$$

asimptotiką, kai $x \to -\infty$.

Šiuo atveju svarbus yra funkcijos $p(t) = \sin t$ funkcijos maksimumo taškas $t = \frac{\pi}{2}$. Turime $\sin t \sim 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2$, $\cos t \sim \frac{\pi}{2} - t$. Todėl

$$I(x) \sim \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2\right)} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt =$$

$$-\frac{e^{-x}}{x} \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{x\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2} d\left(x\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2\right) \sim -\frac{e^{-x}}{x}.$$

3.4 pavyzdys. Raskime integralo

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$$

asimptotiką, kai $n \to \infty$.

Pertvarkome pointegralinį reiškinį:

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{n \ln \sin t}\, dt.$$

Pagrindinę įtaką integralui turi funkcijos $\ln \sin t$ maksimumo taško $t = \frac{\pi}{2}$ aplinka. Turime $\ln \sin t = \ln(1 - (1 - \sin t)) \sim -1 + \sin t \sim -\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2$. Todėl

$$I(x) \sim \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\delta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2} dt = -\int_{\delta}^{0} e^{-\frac{n}{2}u^2} du = \int_0^{\delta} e^{-\frac{n}{2}u^2} du \sim$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{n}{2}u^2} du = \sqrt{\frac{2}{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

3.3.4. Laplaso metodo modifikacijos

Tarkime, kad $p'(c) = 0$, $p''(c) < 0$ (funkcija $p(t)$ įgyja maksimumą vidiniame intervalo (a, b) taške $t = c$) ir $f(t) \sim f_0(t - c)^\lambda$, kai $t \to c$. Tada Laplaso integralą $I(x) = \int_a^b e^{xp(t)} f(t)\, dt$, kai $x \to +\infty$ pertvarkome taip:

$$I(x) \sim f_0 \int_{c-\delta}^{c+\delta} (t - c)^\lambda e^{x\left(p(c) + \frac{p''(c)}{2}(t-c)^2\right)} dt \sim$$

$$f_0 e^{xp(c)} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - c)^\lambda e^{\frac{x\, p''(c)}{2}(t-c)^2} dt = 2 f_0 e^{xp(c)} \int_0^{+\infty} (t - c)^\lambda e^{\frac{x\, p''(c)}{2}(t-c)^2} dt.$$

Keičiame kintamąjį $t - c = \sqrt{\frac{2}{x\,|p''(c)|}}\; u$:

$$I(x) \sim 2 f_0 e^{xp(c)} \left(\frac{2}{x\,|p''(c)|}\right)^{\frac{\lambda+1}{2}} \int_0^{+\infty} u^\lambda e^{-u^2} du.$$

Integralas pertvarkomas taip:

$$\int_0^{+\infty} u^\lambda e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(u^2\right)^{\frac{\lambda-1}{2}} e^{-u^2} d\,u^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{\lambda+1}{2}-1} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right).$$

Taigi gavome

$$I(x) \sim f_0 e^{xp(c)} \left(\frac{2}{x\,|p''(c)|} \right)^{\frac{\lambda+1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2} \right).$$

3.4. Stacionariosios fazės metodas

3.4.1. Fazinė funkcija be stacionariųjų taškų

Nagrinėsime integralą

$$I(x) = \int_a^b e^{ix\,S(t)} f(t)\,dt, \tag{3.6}$$

kai a, b, $S(t)$, $f(t)$ nepriklauso nuo teigiamo parametro x. $S(t)$ vadinama **fazine** funkcija.

3.6 lema. *(Rymano – Lebego)* Jei funkcija $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ (Lebego integralas $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ konverguoja), tai

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\,t} f(t)\,dt = o(1), \ (x \to +\infty).$$

3.2 teorema. Tarkime, kad $[a,b]$ – baigtinė atkarpa, $S(t) \in C^{n+2}[a,b]$, $f(t) \in C^{n+1}[a,b]$ ir $(\forall x \in [a,b])$ $S'(t) \neq 0$ (nėra stacionariųjų taškų). Tada

$$\int_a^b e^{ix\,S(t)} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(ix)^{k+1}} + o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

$$a_0 = \frac{f(b)\,e^{ixS(b)}}{S'(b)} - \frac{f(a)\,e^{ixS(a)}}{S'(a)}.$$

Parodykime, kaip gaunamas koeficientas a_0.

$$\int_a^b e^{ix\,S(t)} f(t)\,dt = \frac{1}{ix}\int_a^b \frac{f(t)}{S'(t)}\,d\,e^{ix\,S(t)} = \left.\frac{f(t)\,e^{ixS(t)}}{ix\,S'(t)}\right|_a^b - \frac{1}{ix}\int_a^b \left(\frac{f(t)}{S'(t)}\right)' e^{ix\,S(t)}\,dt.$$

3.5 pavyzdys.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(1+t)^\alpha}\,dt = \frac{1}{ix} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \ \alpha > 0, \ x \to +\infty.$$

3.4.2. Pagrindinė formulė

3.7 lema.

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}. \tag{3.7}$$

Įrodymas. Sudarome uždarąjį kontūrą $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ (3.1 pav.; 61 psl.) ir pastebėję, kad funkcija $F(z) = e^{iz^2}$ yra analizinė, gauname

$$\oint\limits_C F(z)dz = \int\limits_{C_1} F(z)dz + \int\limits_{C_2} F(z)dz + \int\limits_{C_3} F(z)dz = 0.$$

Pirma parodykime, kad $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{C_2} F(z)dz = 0$. Kai $z \in C_2$, turime pastovų integravimo kintamojo z modulį $r = R$, $z = x + iy = Re^{i\varphi} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $dz = iRe^{i\varphi}d\varphi$, $z^2 = R^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$ ir integravimo kintamojo argumentas kinta $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$:

$$\int\limits_{C_2} F(z)dz = iR \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)} d\varphi.$$

Pasirinkime mažą teigiamą δ ir integruojame du integralus: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} = \int\limits_0^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\frac{\pi}{4}}$. Kadangi $\sin 2\varphi \approx 2\varphi$, kai $\delta \to 0$, gauname

$$\left| iR \int\limits_0^{\delta} e^{iR^2\cos 2\varphi - R^2\sin 2\varphi} d\varphi \right| \leqslant R \int\limits_0^{\delta} e^{-2R^2\varphi} d\varphi = \frac{1 - e^{-2R^2\delta}}{2R}.$$

Taigi šis integralas yra nykstamoji funkcija, kai $R \to +\infty$.

Įvertinkime antrąjį integralą.

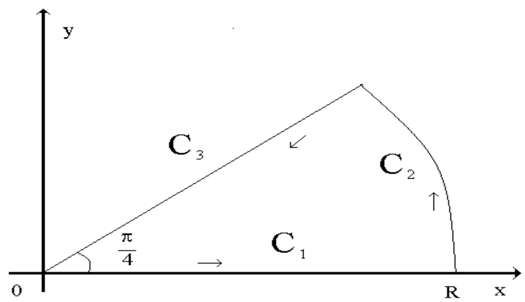
$$\left| iR \int\limits_{\delta}^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2\cos 2\varphi - R^2\sin 2\varphi} d\varphi \right| \leqslant R \int\limits_{\delta}^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\varphi} d\varphi.$$

Šiam integralui taikome Laplaso metodą ir gauname, kad jis irgi yra nykstamoji funkcija, kai $R \to +\infty$.

Pertvarkome integralą $\int\limits_{C_3} F(z)dz$. Kai $z \in C_3$, turime $z = re^{i\frac{\pi}{4}}$, $dz = e^{i\frac{\pi}{4}}dr$, $z^2 = r^2e^{2i\frac{\pi}{4}} = ir^2$, r kinta nuo R iki 0 (žr. 3.1 pav.; 61 psl.). Todėl

$$\int\limits_{C_3} F(z)dz = e^{i\frac{\pi}{4}}\int\limits_R^0 e^{-r^2}dr \sim -\frac{\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}, \text{kai } R \to +\infty.$$

Pastebėję, kad $z = x$, kai $x \in C_1$, gauname, kad (3.7) integralas lygus $-\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{C_1} F(z)dz$.



3.1 pav.. Integravimo kontūras

3.5 pratimas. Įrodykite formulę

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}.$$

Tarkime, kad $f(t) \in C^1[a,b]$, $(\forall t \in (a,b))\ S'(t) > 0$, $S'(a) = 0$ ir $S''(a) \neq 0$ ($t = a$ yra funkcijos $S(t)$ stacionarusis taškas). Tada fazinės funkcijos Teiloro eilutė yra

$$S(t) = S(a) + \frac{1}{2}S''(a)(t-a)^2 + \cdots$$

Pertvarkome Furjė apibendrintąjį (3.6) integralą

$$I(x) = \int_a^b e^{ix\,S(t)}f(t)\,dt \sim \int_a^{a+\delta} e^{ix\left(S(a)+\frac{1}{2}S''(a)(t-a)^2\right)}f(a)\,dt =$$

$$f(a)e^{ixS(a)}\int_a^{a+\delta} e^{ix\left(\frac{1}{2}S''(a)(t-a)^2\right)}\,dt \sim$$

$$f(a)e^{ixS(a)}\int_a^{+\infty} e^{ix\left(\frac{1}{2}S''(a)(t-a)^2\right)}\,dt,\ \text{kai } x\to+\infty.$$

Keičiame integravimo kintamąjį $\sqrt{\frac{1}{2}xS''(a)}\,(t-a) = z$ ($S''(a) > 0$) ir taikome 3.7 lemos (3.7) formulę:

$$I(x) = \int_a^b e^{ix\,S(t)} f(t)\,dt \sim \frac{\sqrt{\pi}f(a)e^{ixS(a)+i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2xS''(a)}}.$$

Kai $S''(a) < 0$, gausime (žr. 3.5 pratimą)

$$I(x) = \int_a^b e^{ix\,S(t)} f(t)\,dt \sim \frac{\sqrt{\pi}f(a)e^{ixS(a)-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{-2xS''(a)}}.$$

3.4.3. Lokalizavimo principas

Finitinių aibėje $\Omega \subset R$ ir be galo daug kartų diferencijuojamų funkcijų klasę žymėsime $C_0^\infty(\Omega)$. Aibė Ω žymima $\operatorname{supp} f$ ir vadinama funkcijos f suportu (atrama).

3.6 pavyzdys.

$$\varphi(t) = e^{\frac{1}{t^2-1}} \in C_0^\infty\left[-1,1\right],\ \operatorname{supp}\varphi(t) = \left[-1,1\right].$$

3.8 lema. Tarkime, kad $f(t) \in C_0^\infty(R)$, $S(t) \in C^\infty(R)$ ir $(\forall t \in R) S'(t) \neq 0$. Tada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\,S(t)} f(t)\,dt = O\left(x^{-\infty}\right),\ (x\to+\infty).$$

Tarkime, kad t_0 – funkcijos $S(t)$ stacionarusis taškas, t. y. $S'(t_0) = 0$. Pažymėkime $\varphi(t;t_0) \in C_0^\infty\left(t_0-\delta, t_0+\delta\right)$. Čia parametras $\delta > 0$ yra toks, kad intervale $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$ nėra kitų funkcijos $S(t)$ stacionariųjų taškų. Pažymėkime integralą

$$I(x;t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t;t_0)e^{ix\,S(t)}dt,$$

kuris turi pagrindinę įtaką Furjė apibendrintam (3.6) integralui $I(x)$.

3.3 teorema. Tarkime, kad galioja 3.8 lemos sąlygos ir fazinė funkcija $S(t)$ turi integravimo intervale $[a, b]$ baigtinį skaičių stacionariųjų taškų t_1, t_2, …, t_n. Tada

$$I(x) = \int_a^b e^{ix\,S(t)} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} I(x; t_k) + O\left(x^{-\infty}\right), \ (x \to +\infty).$$

3.4.4. Etaloniniai integralai

3.9 lema. *(A. Erdélyi, 1947)* Tarkime, kad $f(t) \in C_0^\infty[0, \delta]$, $(\forall k)\, f^{(k)}(\delta) = 0$, $\alpha \geqslant 1$, $\lambda > 0$. Tada

$$\int_0^\delta t^{\lambda-1} f(t) e^{ixt^\alpha}\,dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-\frac{k+\lambda}{\alpha}}, \ (x \to +\infty),$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!\,\alpha}\,\Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\alpha}\right) e^{\frac{i\pi(k+\lambda)}{2\alpha}}.$$

3.7 pavyzdys.

$$\int_0^1 e^{ixt^3}\,dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt[3]{x}}, \ x \to +\infty.$$

Pastebėkime, kad $\Gamma(z+1) = \Gamma(z)\,z$ ir todėl $\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3}$.

3.8 pavyzdys.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin(x\cos t)\,dt \sim \frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) + o\left(\frac{1}{x}\right), \ x \to \infty.$$

3.5. Balno metodas

3.5.1. Analizinės funkcijos integravimas

Tarkime, kad t didelis realusis parametras, $f(z)$ ir $g(z)$ analizinės kompleksinių skaičių srityje $D \subset \mathcal{C}$, integravimo kontūras $\gamma \subset D$. Nagrinėsime integralą

$$I(t) = \int\limits_\gamma f(z) e^{t\,h(z)}\,dz. \tag{3.8}$$

Analizinės funkcijos $h(z) = \varphi(x, y) + \mathbf{i}\psi(x, y)$ realioji ir menamoji dalys yra Koši ir Rymano lygčių sprendinys

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Todėl, kai $z = x + iy$, turime

$$\frac{dh}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Funkcijos $\varphi(x, y)$ ir $\psi(x, y)$ yra harmoninės:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0.$$

3.5.2. Metodo idėja

Todėl taškai z_0: $\frac{dh}{dz}(z_0) = 0$ negali būti ekstremumai ir vadinami **balno** taškais. Šio taško aplinkoje

$$h(z) \approx h(z_0) + \frac{h^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m\,. \tag{3.9}$$

Balno metodo idėja – pakeisti integravimo kontūrą γ taip, kad taško z_0 aplinkoje, gauti Re$h = \varphi = const$ arba Im$h = \psi = const$ ir taikyti stacionariosios fazės arba Laplaso metodą.

3.9 pavyzdys. Airio (Airey, 1937) funkcijos asimptotika.

$$\mathrm{Ai}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \cos\left(\frac{x^3}{3} + t\,x\right) dx \sim \frac{e^{-\frac{2\sqrt{t^3}}{3}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{t}},\ t \to +\infty$$