

SAVARANKIŠKO DARBO UŽDUOTYS

A grupė

- Plokštumoje pasirinkite du vektorius $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ ir nubrėžkite vektorius $2\vec{a} + 3\vec{b}$, $3\vec{a} - 4\vec{b}$, $-\vec{a} + 5\vec{b}$, $0,5\vec{a} + 1,5\vec{b}$, $-\frac{4}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$.
- Žinomas stačiakampis gretasienis $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Vektoriais $\vec{AB} = a$, $\vec{AD} = b$, $\vec{AA}_1 = c$ išreikškite vektorius \vec{AB}_1 , \vec{AC}_1 , \vec{DB}_1 , \vec{AM} , \vec{DM} , čia M – briaunos CC_1 vidurio taškas.
- Raskite vektorių ilgius:
 - $\vec{a} = \{-3; 4\}$,
 - $\vec{a} = 2\vec{i} - 9\vec{j}$,
 - $\vec{a} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$.
- Raskite vektoriaus \vec{AB} koordinates ir ilgį, kai $A(-3; 2)$, $B(4; 1)$.
- Žinomi vektoriai: $\vec{a} = \{2; -1\}$, $\vec{b} = \{-3; 4\}$, $\vec{c} = \{0; -2\}$. Raskite vektorius: $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.
- Ar kolinearūs vektoriai:
 - $\vec{a} = \{2; 3\}$ ir $\vec{b} = \{-4; -6\}$,
 - $\vec{a} = \{-5; 6\}$ ir \vec{AB} , čia $A(-11; 7)$, $B(-21; 19)$,
 - $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ ir $\vec{b} = \{2; -2; -8\}$?
- Ar komplanarūs vektoriai:
 - $\vec{a} = \{-3; -3; 0\}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{j}$,
 - $\vec{a} = \{0; 5; 3\}$, $\vec{b} = \{2; 2; 2\}$, $\vec{c} = \{1; 0; 4\}$?
- Raskite $\vec{a} \cdot \vec{b}$, kai $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.
- Raskite kampą tarp vektorių:
 - $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j}$,
 - $\vec{a} = (-2; 4; 5)$, \vec{AC} , čia $A(3; -5; 1)$, $C(4; 4; 4)$.

10. Ar statmeni vektoriai:

1) $\vec{a} = \{-2; 4\}$ ir $\vec{b} = \{6; 3\}$,

2) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ ir $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$?

11. Žinoma: $|\vec{a}| = 7\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 8$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Raskite $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

12. Raskite $\triangle ABC$ kampų didumus, jei $A(1; 2; 3)$, $B(3; 0; 4)$, $C(2; 1; 3)$.

13. Apskaičiuokite vektorius $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ir $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, jei $\vec{a} = \{1; 1; 0\}$,
 $\vec{b} = \{0; 3; 1\}$, $\vec{c} = \{2; 0; 1\}$.

14. Apskaičiuokite trikampės piramidės $ABCD$ aukštinės AH ilgį, jei $A(2; -4; 5)$,
 $B(-1; -3; 4)$, $C(5; 5; -1)$, $D(1; -2; 2)$.

15. Patikrinkite, ar trikampis su viršūnėmis $M(1; 2; 3)$, $N(3; 2; 1)$ ir $P(1; 4; 1)$ yra lygiakraštis.

16. Parašykite tiesės, einančios per atkarpos AB vidurio tašką ir statmenos jai, kai $A(2; 5)$, $B(-6; 3)$, lygtį.

17. Parašykite tiesės, einančios per tašką $M_0(2; -1)$ ir kolinearios vektoriui $\vec{p} = \{-2; 3\}$, lygtį.

18. Parašykite tiesės, einančios per taškus $A(-3; 2)$ ir $B(2; 5)$, lygtį.

19. Parašykite tiesės $2x - 5y + 20 = 0$ ašinę lygtį.

20. Parašykite tiesės, einančios per tašką $M_0(1; -4)$ ir su abscisių ašimi sudarančios 120° kampą, lygtį.

21. Nustatykite tiesių tarpusavio padėtis:

1) $x + y = 0$ ir $y - 3 = 0$,

2) $3x + 2y + 1 = 0$ ir $6x + 4y + 5 = 0$,

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}x - 3y + \sqrt{3} = 0$ ir $x - 2\sqrt{3}y + 2 = 0$.

22. Su kuriomis m reikšmėmis tiesės $9x + my - 3 = 0$ ir $4x - my + 5 = 0$ yra statmenos?

23. Parašykite parametrines tiesių lygtis:

1) $3x + 6y + 5 = 0$,

2) $x - 2y - 4 = 0$,

3) $y = -3x + 5$,

4) $x = 2$,

5) $y = -3$,

6) $2x + 3y = 0$.

24. Parašykite tiesės, einančios per tašką $M(7; 4)$ ir statmenos tiesei $3x - 2y + 4 = 0$, lygtį.
25. Parašykite tiesės, statmenos tiesei $2x + 7y - 5 = 0$ ir einančios per tiesių $3x - y = 0$ ir $x + 4y - 2 = 0$ sankirtos tašką, lygtį.
26. Parašykite tiesės, einančios per tašką $O(0; 0)$ ir tiesių $2x + y - 3 = 0$ bei $7x - 4y + 2 = 0$ sankirtos tašką, lygtį.
27. Parašykite tiesės, lygiagrečios su tiese $2x - y + 4 = 0$ ir einančios per tiesių $3x - 5y + 2 = 0$, $5x - 2y + 4 = 0$ sankirtos tašką, lygtį.
28. Apskaičiuokite atstumus nuo taškų $A(3; 1)$, $B(2; -4)$, $C(5; -1)$, $D(0; -3)$, $O(0; 0)$ iki tiesės $3x + 4y = 0$.
29. Sudarykite plokštumos, einančios per koordinačių pradžios tašką ir statmenos plokštumoms $\beta: 2x - y + 5z + 3 = 0$ ir $\gamma: x + 3y - z - 7 = 0$, lygtį.
30. Patikrinę, ar tiesės $a: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4}$ ir $b: \frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2}$ susikerta, parašykite per jas einančios plokštumos lygtį.
31. Patikrinkite, ar žinoma tiesė yra žinomoje plokštumoje:
- 1) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{5}$, $3x + 5y - z - 2 = 0$,
 - 2) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{3}$, $3x - 3y + 2z - 5 = 0$,
 - 3) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 8 = 0, \\ 5x + 3y + z - 16 = 0, \end{cases}$ $2x - y - 4z - 24 = 0$. Žinomą tiesę parašykite parametrinėmis lygtimis. Parametru galite pasirinkti, pavyzdžiui, kurį nors kintamąjį.
32. Parašykite plokštumos, einančios per koordinačių sistemos pradžios tašką ir statmenos tiesei $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{-2}$, lygtį.
33. Ar kertasi tiesės $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{4}$ ir $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$?
34. Raskite atstumą nuo taško $M(1; 2; 5)$ iki tiesės:
- 1) $x = t$, $y = 1 - 2t$, $z = 3 + t$,
 - 2) $x + y - z + 2 = 0$, $4x - 3z + 3 = 0$.
35. Su kuriomis A ir B reikšmėmis plokštuma $Ax + By + 6z - 7 = 0$ yra statmena tiesei $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{2}$?

36. Parašykite apskritimo, einančio per tašką $M(5; -8)$, lygtį, kai apskritimo centras yra taškas $C(0; 4)$.
37. Duota elipsė $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$. Parašykite jos direktrisių lygtis.
38. Parašykite hiperbolę, kurios realioji ašis sutampa su abscisių ašimi, jei atstumas tarp viršūnių yra lygus 8, o tarp židinių – 10.
39. Duota hiperbolė $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Raskite židinių koordinates ir ekscentricitetą. Parašykite direktrisių ir asimptočių lygtis.
40. Sudarykite parabolės, kurios viršūnė yra koordinačių pradžios taškas, lygtį, jei ji simetrinė abscisių ašies atžvilgiu, o atstumas nuo židinio iki viršūnės lygus 3.

B grupė

41. Žinomas lygiagretainis $ABCD$, kurio įstrižainių sankirtos taškas yra O , kraštinių BC ir AD vidurio taškai – F ir H . Raskite $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{HA}$, jei $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.
42. Raskite taško B koordinates, jei vektorius \overrightarrow{AB} lygus vektoriui $\vec{a} = \{-1; 1; 3\}$, o taško A koordinatės yra $(2; 0; -5)$.
43. Žinoma: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$. Raskite:
- 1) $|\vec{a} - 2\vec{b}|$,
 - 2) $(\vec{a} - 3\vec{b})(3\vec{a} + \vec{b})$.
44. Žinoma: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. Su kuriomis λ reikšmėmis vektoriai $\lambda\vec{a} + 17\vec{b}$ ir $3\vec{a} - \vec{b}$ yra statmeni?
45. Žinoma: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 13$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 24$. Raskite $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$.
46. Žinomos $\triangle ABC$ viršūnės $A(1; 2; 3)$, $B(9; 6; 4)$, $C(3; 0; 4)$. Apskaičiuokite $\triangle ABC$ plotą.
47. Ant vektorių $\vec{a} = \{2; 3; 1\}$ ir $\vec{b} = \{-1; 1; 2\}$, atidėtų nuo vieno taško, nubrėžtas trikampis. Apskaičiuokite jo plotą.
48. Vektoriai \vec{a} , \vec{b} ir \vec{c} yra nekomplanarūs. Kokios turi būti skalario λ reikšmės, kad vektoriai $\vec{a} + 2\vec{b} + \lambda\vec{c}$, $4\vec{a} + 5\vec{b} + 6\vec{c}$ ir $7\vec{a} + 8\vec{b} + \lambda^2\vec{c}$ būtų komplanarūs?
49. Raskite atkarpos, padalytos taškais $M(3; 1; 3)$ ir $N(6; -1; 1)$ į tris lygias dalis, galų P ir Q koordinates.

50. Parašykite tiesės, einančios per tašką $M_0(2; 5)$ ir ordinačių ašyje atkertančios 3 ilgio vienetų atkarpą, lygtį.
51. Nustatykite tiesės $5x + 2y + 5 = 0$ krypties koeficientą.
52. Žinomos dviejų stačiakampio kraštinių lygtys $x - 2y = 0$ ir $x - 2y + 15 = 0$. Vienos jo įstrižainės lygtis yra $7x + y - 15 = 0$. Raskite stačiakampio viršūnių koordinates.
53. Raskite atstumą tarp lygiagrečių tiesių $x + 3y + 4 = 0$ ir $x + 3y + 6 = 0$.
54. Kokį kampą sudaro abscisių ašis su tiese, einančia per taškus $A(2; -5)$ ir $B(0; -3)$?
55. Parašykite tiesės, einančios per tašką $M(-4; 10)$ ir atkertančios koordinačių ašyse vienodo ilgio atkarpas, lygtį.
56. Parašykite tiesių, einančių per tašką $M(3; 1)$ ir su tiese $2x + 3y - 1 = 0$ sudarančių 45° kampą, lygtis.
57. Parašykite tiesių, lygiagrečių koordinačių ašims ir einančių per tiesių $2x - 6y + 3 = 0$, $5x + y - 2 = 0$ sankirtos tašką, lygtis.
58. Parašykite tiesių, einančių per tiesių $x + y - 4 = 0$, $2x + 3y - 9 = 0$ sankirtos tašką ir su antrąja tiese sudarančių 45° kampą, lygtis.
59. Parašykite tiesių, lygiagrečių su tiese $5x + 12y - 1 = 0$ ir nutolusių nuo jos atstumu, lygiu 5, lygtis.
60. Parašykite tiesės, einančios per tašką $M(2; 1)$ ir su tiese $2x + 3y + 4 = 0$ sudarančios 45° kampą, lygtį.
61. Parašykite tiesės
- $$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$$
- kanonines lygtis.
62. Parašykite plokštumos, einančios per tiesę $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$ ir lygiagrečios su plokštuma $x + y - z + 15 = 0$, lygtį.
63. Parašykite tiesės, einančios per tašką $M(3; -1; -4)$, kertančios ordinačių ašį ir kolinearios su plokštuma $y + 2z = 0$, lygtis.
64. Parašykite plokštumos, einančios per tašką $M(-3; 1; 0)$ ir per tiesę $x + 2y - z + 4 = 0$, $3x - y + 2z - 1 = 0$, lygtį.

65. Raskite kampą tarp tiesių

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

ir

$$\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

66. Parašykite plokštumos, einančios per tiesę $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$ ir lygiagrečios su plokštuma $x + y - z + 15 = 0$, lygtį.

67. Ar galima per tiesę $\frac{x-7}{4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{5}$ išvesti plokštumą, lygiagrečią su plokštuma $2x + y - 7z + 1 = 0$?

68. Parašykite apskritimo $x^2 + y^2 = 5$ liestinės, einančios per tašką $M_0(1; -2)$, lygtį.

69. Apskaičiuokite kampo, kuriuo apskirtimas $x^2 + y^2 = 16$ matomas iš taško $A(8; 0)$, dydį. Kampas, kuriuo apskirtimas matomas iš žinomo taško, yra kampas, kurį sudaro apskritimo liestinės žinomame taške.

70. Parašykite hiperbolės, kurios realioji ašis yra abscisių ašyje, kanoninę lygtį, jei hiperbolės realioji pusašė lygi 5, o viršūnės atskiria atstumus tarp centro ir židinių pusiau.

71. Parašykite hiperbolės, kurios realioji ašis lygi 6 ir yra abscisių ašyje, kanoninę lygtį, jei žinoma, kad hiperbolė eina per tašką $M(9; -4)$.

72. Parašykite parabolės, kurios židinytis yra taškas $F(5; 0)$, o direktrisė – ordinačių ašis, lygtį.

73. Sudarykite parabolės lygtį, jei ji simetrinė abscisių ašies atžvilgiu ir eina per taškus $O(0; 0)$ ir $M(1; -4)$.

74. Sudarykite parabolės lygtį, jei ji simetrinė ordinačių ašies atžvilgiu, židinytis yra $F(0; 2)$, o viršūnė – $O(0; 0)$.

75. Sudarykite parabolės lygtį, jei ji simetrinė ordinačių ašies atžvilgiu ir eina per taškus $O(0; 0)$ ir $M(6; -2)$.

C grupė

76. Vektoriai \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} yra vienetiniai, o jų suma yra nulinis vektorius. Apskaičiuokite $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

77. Raskite kampą tarp nenulinių vektorių \vec{a} ir \vec{b} , jei žinoma, kad vektorius $\vec{a} + 3\vec{b}$ statmenas vektoriui $7\vec{a} - 5\vec{b}$, o vektorius $\vec{a} - 4\vec{b}$ statmenas vektoriui $7\vec{a} - 2\vec{b}$.
78. Žinomi trys tarpusavyje statmeni spinduliai OA, OB, OC , kurių bendras pradžios taškas yra O . Raskite kampą tarp kampų AOB ir BOC pusiau kampinių.
79. Tiesėje $x + 2y - 12 = 0$ raskite taškus, vienodai nutolusius nuo tiesių $x + y - 5 = 0$ ir $7x - y + 11 = 0$.
80. Raskite tašką, nuo tiesių $4x - 3y + 20 = 0$ ir $3x + 4y - 60 = 0$ nutolusį atstumu, lygiu 5.
81. Parašykite tiesės, einančios per tašką $O(0; 0)$ ir nutolusios nuo taško $M(3; -2)$ atstumu, lygiu 1, lygtį.
82. Tiesėje $x + y - 5 = 0$ raskite tašką M tokį, kad $\angle AMB = 45^\circ$, jei $A(5; 2), B(2; 1)$.
83. Raskite atstumą tarp tiesių

$$\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

ir

$$\begin{cases} x = -t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 3t. \end{cases}$$

84. Iš tiesių, kertančių tieses $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$, $\frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$, raskite tą, kuri būtų lygiagreti su tiesė $\frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{1}$.
85. Parašykite tiesių $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ ir $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ bendrojo statmens lygtį. Dviejų tiesių bendrasis statmuo – tiesė, kertanti kiekvieną iš žinomų tiesių stačiuoju kampu.
86. Parašykite elipsės $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$ liestinių, einančių per tašką $A(-6; 3)$, lygtis.
87. Žinomas apskritimas $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$. Raskite kampą, kurį sudaro spinduliai, jungiantys apskritimo centrą ir apskritimo sankirtos su abscisių ašimi taškus.
88. Apskritimas eina per tašką $A(0; -4)$ ir koordinatų pradžios taške liečia Ox ašį. Parašykite apskritimo lygtį ir nustatykite apskritimo sankirtos su koordinatų plokštumos ketvirčių pusiau kampinėmis taškų koordinatas.

89. Elipsėje $x^2 + 4y^2 = 4$ nubraižytas taisyklingasis trikampis, kurio viena viršūnė sutampa su elipsės didžiosios pusašės galu. Nustatykite trikampio viršūnių koordinates.

90. Raskite elipsės $x^2 + 2y^2 = 18$ stygos, dalijančios kampus tarp koordinačių ašių pusiau, ilgį.

91. Raskite hiperbolės $x^2 - 3y^2 = 12$ asimptočių ir apskritimo, kuris eina per koordinačių pradžios tašką, o jo centras yra dešinysis hiperbolės židiny, sankirtos taškų koordinates.

92. Per parabolės $y^2 = -4x$ židinį nubrėžta tiesė, su abscisių ašimi sudaranti 120° kampą. Parašykite šios tiesės lygtį ir apskaičiuokite gautos parabolės stygos ilgį.

93. Lygtis paverskite kanoninėmis ir nustatykite jų antrosios eilės paviršių:

1) $16x^2 + 9y^2 - z^2 - 9x - 12y + 4z + 71 = 0$,

2) $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$,

3) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x + 4y - 6z = 0$,

4) $3x^2 + 2y^2 + z^2 + 6x + 4y + 2z - 6 = 0$,

5) $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 4x - 8z + 10 = 0$,

6) $2x^2 + y^2 - 3z^2 + 4x - 4y = 0$,

7) $2x^2 + y^2 - 3z^2 + 6z = 0$,

8) $2x^2 + y^2 + 2z + 1 = 0$,

9) $2x^2 - y^2 + 2z + 1 = 0$,

10) $2x^2 + z^2 + 2x + z = 0$.