



40 pav.

## SAVARANKIŠKO DARBO UŽDUOTYS

### A grupė

1. Parašykite 5 pirmuosius skaičių sekos narius:

1)  $x_n = \frac{1}{2n+1}$ , 2)  $x_n = \frac{n+1}{n^3+1}$ , 3)  $x_n = \frac{n}{2^{n+1}}$ , 4)  $x_n = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2}$ .

2. Apskaičiuokite skaičių sekų ribas:

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 3n + 1}{n^2 + 1}$ , 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n^2 - 3n + 2}$ , 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}} + 2n + 1}{7n\sqrt{n} + 1}$ , 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$ ,

5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$ , 6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$ , 7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^{n+1}}$ , 8)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2^{\frac{1}{n}} + 1}$ ,

9)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 15n}$ , 10)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1\,000n^3 + 3n^2}{0,001n^4 - 100n^3 + 1}$ , 11)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 4n - 1}{n - 1}$ .

3. Apskaičiuokite funkcijų ribas:

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1}$ , 2)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$ , 3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$ ,

4)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$ , 5)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 19}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$ , 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(e - x) - 1}$ ,

7)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$ , 8)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$ , 9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ , 10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + x^3}$ .

4. Taikydami Liopitalio taisyklę, apskaičiuokite:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3^x},$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}.$$

5. Nustatykite funkcijos apibrėžimo sritį:

$$1) y = \log_2(x^2 - 4),$$

$$2) y = \sin \log_2 \frac{1}{2x - 1}.$$

6. Nustatykite, ar lyginė, ar nelyginė žinoma funkcija:

$$1) f(x) = 3x - \frac{2x}{x^2 - 4}, \quad 2) f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} x, \quad 3) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

7. Raskite funkcijos trūkio taškus ir nustatykite jų tipą:

$$1) f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

8. Raskite funkcijų išvestines:

$$1) y = \ln(x^2 - 1),$$

$$2) y = \frac{\operatorname{ctgx} + x}{1 - x \operatorname{ctgx}},$$

$$3) y = x \sin x + x^2 \cos x,$$

$$4) y = \frac{\arcsin x}{\operatorname{arctgx}}.$$

9. Kubo briauna yra  $x = 5 \pm 0,01$  m. Apskaičiuokite absoliučiąją ir santykinę paklaidas, gaunamas skaičiuojant šio kubo tūrį.

10. Apytiksliai apskaičiuokite funkcijos  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$  reikšmę taške  $x = 0,1$ .

11. Raskite funkcijos  $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$  monotoniškumo intervalus ir ekstremumus.

12. Raskite visas funkcijos  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{2 + x - x^2}$  grafiko asimptotes.

13. Ištirkite funkciją ir nubrėžkite jos grafiką:

$$1) y = x^{\frac{5}{3}}, \quad 2) y = \frac{x^3}{6} - x^2, \quad 3) y = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad 4) y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5.$$

B grupė

14. Parašykite bendrojo sekos nario formulę:

$$1) 1, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{7^2}, \dots \quad 2) 1, \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \dots$$

15. Apskaičiuokite skaičių sekų ribas:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 3}), \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 - 3},$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}, \quad 4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n - 3} - \sqrt{n^2 - n + 1}),$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{\sqrt{n^2 - 2n + n}}, \quad 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{5n}\right)^{2n-7},$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n + 2}, \quad 8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 1}},$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)^4 - (n - 1)^4}{(2n + 1)^4 + (n - 1)^4}, \quad 10) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 1},$$

$$11) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n), \quad 12) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right),$$

$$13) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 2n}{(n + 1)^4 - (n + 4)^4}, \quad 14) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}),$$

$$15) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n + 5)} - n), \quad 16) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n + 2}(\sqrt{n + 3} - \sqrt{n - 4}),$$

$$17) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n + 5}{n - 7} \right)^{\frac{n}{6} + 1}.$$

16. Apskaičiuokite funkcijų ribas:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt[7]{x}}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2} - 4},$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5 - x} - 2}{\sqrt{2 - x} - 1}, \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + 3x - x^2} - 1}{\sqrt[3]{x^2 + x^3}},$$

5)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x},$

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos 2x},$

7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\arcsin 3x},$

8)  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4},$

9)  $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x}{4-x^2},$

10)  $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x}{4-x^2}.$

17. Taikydami Liopitalio taisyklę, apskaičiuokite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

18. Nustatykite funkcijos apibrėžimo sritį:

1)  $y = \log_2(x+2) + \log_2(x-2),$

2)  $y = \arccos(1-2x) + \sqrt{2-x} + \frac{3-x}{1+x},$

3)  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}} + \sqrt{x^2-5x+6}.$

19. Raskite funkcijos trūkio taškus ir nustatykite jų tipą:

$$1) f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}, \quad 2) f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{|\sin 3x|}, \quad 3) f(x) = \frac{\sqrt[3]{27-x}-3}{\operatorname{tg} 2x}.$$

20. Raskite funkcijų išvestines:

$$1) f(x) = \sin^3 x, \quad 2) y = \ln \operatorname{tg} x, \quad 3) y = \arccos \frac{2-x}{x\sqrt{2}},$$

$$4) y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, \quad 5) y = \ln^2 \cos^2(3x^2-1).$$

21. Koku tikslumu reikia išmatuoti kreivės  $y = x^2\sqrt{x}$ , kai  $x \leq 1$ , abscisę, kad skaičiuojant jos ordinatę absoliučioji paklaida nebūtų didesnė nei 0,1?

22. Apskaičiuokite apytiksliai  $\sin 60^\circ 3'$ .

23. Išstirkite funkciją ir nubrėžkite jos grafiką:

$$1) f(x) = 3x - \frac{2x}{x^2-4}, \quad 2) f(x) = x + 2\operatorname{arctg} x, \quad 3) f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}},$$

$$4) y = e^{-x^2}, \quad 5) y = \frac{2x}{1+x^2}, \quad 6) y = \frac{x^4}{x^3-1}.$$

### C grupė

Apskaičiuokite skaičių sekų ribas:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}},$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^n + 5^n}{3^n - 7 \cdot 5^n},$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 4n} + n}{2n - 1},$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3 + n} - \sqrt[3]{n}},$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+1) - \ln n),$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+3}{n+1} \right)^n,$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3 - 2n^2 + 4n}{4n - 2n^2 + 1} \right)^{n^2+1},$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[5]{n^4 + 2} - \sqrt{n^3 + 1}},$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[4]{n^6 + 6n^5 + 2} - \sqrt[5]{n^7 + 3n^3 + 1}},$$

$$10) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 2n}{\sqrt{n^2 + 1}},$$

$$11) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}}.$$

Apskaičiuokite funkcijų ribas:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 4}{x + 2} \right)^{x^2+3},$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{2(x+5)},$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \left( 2 - \frac{x}{3} \right)^{\sin \pi x},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x),$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 2x}}{\sqrt[5]{x^4 + 3} + 3\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 1}{2x + 3} \right)^x,$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}},$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3tg^2 x)^{ctg^2 x}.$$

Taikydami Liopitalio taisyklę, apskaičiuokite:

$$1) \lim_{x \rightarrow +0} x^x, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \left( tg \frac{\pi x}{4} \right)^{tg \frac{\pi x}{2}}.$$

Nustatykite funkcijos  $y = \log_2(\lg x) + \arcsin \left( \lg \frac{x}{10} \right)$  apibrėžimo sritį.

Raskite funkcijos trūkio taškus ir nustatykite jų tipą:

$$1) y = \frac{\sqrt{|x|+1} - 2}{x^2 - 3}, \quad 2) y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Raskite  $a$  ir  $b$  reikšmes, kad funkcijos būtų tolydžios:

$$1) f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ x^2 + ax + b, & |x| > 1, \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0, \\ ax + b, & 0 < x < 1, \\ \sqrt{x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Raskite funkcijų išvestines:

$$1) y = \sin^2 \ln \sqrt{\operatorname{arccotg}(2x^3 + \sin(3x^2))}, \quad 2) y = x^{x^x},$$

$$3) y = x^{\ln x}, \quad 4) y = (x^2 + 2)^{\sin^2 x}, \quad 5) y = x^{\sin x}.$$

Inžineriniuose skaičiavimuose dažnai prastinami dydžiai  $\pi$  ir  $\sqrt{g}$  (čia  $g$  – laisvojo kūnų kritimo pagreitis), kai vienas jų yra trupmenos skaitiklyje, o kitas – vardiklyje. Kokią santykinę paklaidą gauname taip suprastinę?

Ištirkite funkciją ir nubrėžkite jos grafiką:

$$1) f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}, \quad 2) f(x) = x^2 \ln x,$$

$$3) f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{1-x}}, \quad 4) f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x.$$

#### ĮVAIRŪS UŽDAVINIAI

- Įrodykite, kad vektoriai  $n\vec{c} - p\vec{b}$ ,  $p\vec{a} - m\vec{c}$  ir  $m\vec{b} - n\vec{a}$  yra komplanarūs.
- Įrodykite, kad vektorius  $\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$  yra statmenas vektoriui  $\vec{c}$ .
- Kokią sąlygą turi atitikti vektoriai  $\vec{a}$  ir  $\vec{b}$ , kai  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ?
- Žinoma  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  ir  $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$ . Įrodykite, kad  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ .
- Įrodykite, kad  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$ .
- Raskite vektorių, esantį  $yz$  plokštumoje, statmeną vektoriui  $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$  ir tokį, kad jo ilgis būtų lygus 10 ir statmenas vektoriui.

7. Materialųjį tašką  $M(1; -5; 3)$  veikia jėga  $\vec{F} = \{4; -3; -2\}$ . Raskite šios jėgos momentą koordinatinių pradžių taško atžvilgiu. Jei materialųjį tašką  $M$  veikia jėga  $\vec{F}$ , tai šios jėgos momentas taško  $A$  atžvilgiu yra lygus  $\vec{AM} \times \vec{F}$ .
8. Materialųjį tašką  $M(3; 2; -1)$  veikia jėga  $\vec{F} = \{1; -2; 4\}$ . Raskite šios jėgos momentą taško  $A(1; 2; 3)$  atžvilgiu ir nustatykite kampus, kuriuos jėgos momentas sudaro su koordinatinių ašimis.
9. Raskite tieses, kurios būtų lygiagrečios su tiesėmis  $x+2y-2=0$ ,  $x+2y-6=0$  ir dalytų atstumą tarp jų santykiu 3:1.
10. Raskite tieses, kurios eitų per tašką  $(2, 1)$  ir būtų nutolusios nuo taško  $(0, 0)$  atstumu, lygiu 2.
11. Žinomas lygiašonio trikampio pagrindas  $x+y-1=0$ , viena šoninė kraštinė  $x-2y-2=0$  ir taškas  $(-2, 0)$ , esantis antrosios šoninės kraštinės tiesėje. Raskite antrosios šoninės kraštinės lygtį.
12. Raskite tiesę, einančią per koordinatinių pradžių tašką ir per trikampio, kurio kraštinės yra tiesės  $x-y-4=0$ ,  $2x-11y+37=0$ ,  $2x+7y-17=0$ , pusiauakraštinių sankirtos tašką.
13. Nustatykite, ar taškai  $A_1(2, 1, 1)$  ir  $A_2(2, 1, 3)$  yra vienoje pusėje nuo plokštumos  $x+2y-z-2=0$ ?
14. Raskite plokštumą, einančią per tiesę  $x+y+2z-17=0$ ,  $5x+11y-3z+1=0$  ir statmeną plokštumai  $4x+11y+6z+23=0$ .
15. Plokštumoje  $4x-7y+5z-20=0$  raskite tokį tašką  $P$ , kad vektorius  $\vec{OP}$  su koordinatinių ašimis sudarytų lygius kampus.
16. Raskite plokštumą, išvestą per statmenį, nuleistą iš taško  $(1, 1, 1)$  į tiesę  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{1}$  ir statmeną plokštumai  $x+y-z=0$ .
17. Tiesėse  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$  ir  $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$  raskite tokius taškus, kuriuos sujungę gausime trumpiausią atstumą tarp žinomų tiesių.
18. Per tiesių  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$  ir  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$  sankirtos tašką išveskite tieses, kurios kampą tarp žinomų tiesių dalytų pusiau.
19. Raskite tiesę, kuri būtų plokštumoje  $x+y+z-3=0$ , kirstų tiesę  $y=1$ ,  $z=-2$  ir būtų vienodai pasvirusi į  $OX$  ir  $OY$  ašis.
20. Raskite plokštumą, kuri su koordinatinių ašimis sudarytų lygius kampus ir būtų išvesta per tiesių  $x=y=z$  ir  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$  bendrojo statmens vidurio tašką.

21. Raskite lygtį tiesės, kuri eina per elipsės  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$  stygų  $2x - y + 7 = 0$  ir  $2x - y - 1 = 0$  vidurio taškus.
22. Raskite cilindro, kurio sudaromosios kerta kreivę  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x + y + z = 0$  ir yra lygiagrečios tiesei  $x = y = z$ , lygtį.
23. Raskite paviršiaus, kuris gaunamas sukant tiesę  $z = mx$ ,  $y = a$  aplink  $OZ$  ašį, lygtį.
24. Raskite paviršiaus, kuris gaunamas sukant tiesę  $x - 1 = y = z + 2$  aplink tiesę  $x = y = z$ , lygtį.
25. Raskite lygtį paviršiaus, kurį gauname sukdami apskritimą  $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $y = 0$  aplink  $OZ$  ašį. Koks tai paviršius?
26. Tarkime, kad  $S$  – skritulio plotas, o  $r$  – jo spindulys. Įrodykite, kad išvestinė  $\frac{dS}{dr}$  lygi apskritimo ilgiui.
27.  $V$  – apskritojo cilindro tūris,  $h$  – jo aukštinė, o  $r$  – pagrindo spindulys. Įrodykite, kad esant fiksuotam  $r$  išvestinė  $\frac{dV}{dh}$  lygi cilindro pagrindo plotui, o esant fiksuotam  $h$  išvestinė  $\frac{dV}{dr}$  lygi cilindro šoninio paviršiaus plotui.
28. Nedidelė kompanija gamina paraką, už kurią kiekvieną dieną gauna po 3 Lt už svarą bei papildomai 120 Lt per dieną.  $A(x)$  pažymėkime vidutinę dienos parako kainą, kai pagaminama  $x$  svarų parako per dieną. Parašykite  $A(x)$  formulę ir raskite ribas

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) \text{ ir } \lim_{x \rightarrow \infty} A(x).$$

29. Kulka, paleista į orą pradiniu laiko momentu ( $t = 0$  sekundžių), skrieja į viršų greičiu  $v(t) = 800 - 32t$  (pėdų per sekundę). Koks yra kulkos pagreitis?
30. Žaislų kompanijai, gaminančiai lėles „Bonnie“,  $x$  lėlių gamyba ( $0 \leq x \leq 200$ ) per dieną kainuoja  $C(x) = 100 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{1000}x^2$  dolerių. Kokios yra 100 lėlių pagaminimo ribinės sąnaudos?