0.1. Bendrosios sąvokos

0.1.1. Diferencialinės lygtys su mažuoju parametru

$$F\left(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x', x, t; \varepsilon\right) = 0,$$

$x(t;\varepsilon) \in C^n(T)$, $T \subset [0, +\infty)$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$F\left(x^{(n)}(t;\varepsilon), x^{(n-1)}(t;\varepsilon), \dots, x'(t;\varepsilon), x(t;\varepsilon), t; \varepsilon\right) \equiv 0,$$

$x_0(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} x(t;\varepsilon)$

$$F\left(x_0^{(n)}, x_0^{(n-1)}, \dots, x_0', x_0, t; 0\right) = 0$$

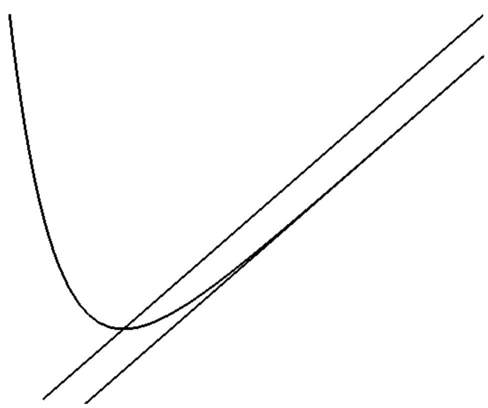
0.1 apibrėžimas. Uždavinys vadinamas ***reguliariuoju***, jei

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \sup_{t\in T} |x(t;\varepsilon) - x_0(t)| = 0$$

Priešingu atveju uždavinys vadinamas ***singuliariuoju***.

0.1 pavyzdys. (žr. 1 pav.)

$$\varepsilon\, x' + x = s,\ \ x(0;\varepsilon) = 1.$$



1 pav. Pasienio sluoksnis

$$x(s;\varepsilon) = (1+\varepsilon)e^{-\frac{s}{\varepsilon}} + s - \varepsilon$$

0.2 pavyzdys. Pakeiskime 0.1.1. pavyzdžio kintamuosius:

$$t = \frac{s}{\varepsilon},\ x(s;\varepsilon) = y(t;\varepsilon).$$

Tada

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{dy}{dt},\ s = \varepsilon t$$

ir gauname:

$$y' + y = \varepsilon\, t,\ y(0;\varepsilon) = 1.$$

Tikslusis 0.2 pavyzdžio sprendinys yra

$$y(t;\varepsilon) = e^{-t} + \varepsilon\left(e^{-t} + t - 1\right).$$

Artinys $y(t;\varepsilon) \approx e^{-t}$ taikytinas tik kai $\varepsilon t \ll 1$ ir netinka, jei $\varepsilon t = O(1)$. Turintys daugiklius εt asimptotinių skeidinių nariai vadinami ***sekuliariai-siais***.

0.1.2. Antrosios eilės lygtys

$$x'' = f\left(x', x, t; \varepsilon\right).$$

Antrosios eilės silpnai netiesinės lygtys

$$a(t)\, x'' + b(t)\, x' + c(t)\, x = \varepsilon\, f\left(x', x, t; \varepsilon\right).$$

Diufingo lygtis

$$y'' + y + \varepsilon y^3 = 0.$$

0.1.3. Tiesioginio skleidimo metodas

Nagrinėsime diferencialinę lygtį

$$x'' + x = \varepsilon f\left(x', x, t; \varepsilon\right). \tag{1}$$

Asimptotinio sprendinio ieškome pavidalu

$$x(t;\varepsilon) = x_0\,(t) + \varepsilon\, x_1\,(t) + \varepsilon^2\, x_2\,(t) + \cdots \tag{2}$$

Įstatome (2) į (1) ir prilyginame koeficientus prie vienodu ε laipsniu:

$$x_0'' + x_0 = 0,$$

$$x_1'' + x_1 = F_1 \equiv f(x_0', x_0, t; 0),$$
$$x_2'' + x_2 = F_2\left(x_0', x_0, x_1', x_1, t\right), \ldots$$

0.1 pratimas. Išreikšti funkciją F_2.

0.3 pavyzdys. Tiesinis osciliatorius su slopinimu

$$x'' + x + \varepsilon\, x' = 0.$$

$$x(t;\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon\, x_1(t) + \varepsilon^2\, x_2(t) + \varepsilon^3\, x_3(t) + \cdots$$

$$x_0'' + x_0 = 0,$$

$$x_n'' + x_n = -x_{n-1},\ n = 1, 2, \dots$$

$$x_0\,(t\ ) = C_1^0 \sin t + C_2^0 \cos t = a\cos{(t+\varphi)}.$$

$$x_1'' + x_1 = -a\cos{(t+\varphi)},$$

$$x_1\,(t) = C_1^1 \sin t + C_2^1 \cos t + \frac{at}{2}\sin{(t+\varphi)}.$$

0.2 pratimas. Raskite $x_2\,(t)$.

0.4 pavyzdys. Konstruojame Diufingo lygties

$$x'' + x + \varepsilon x^3 = 0$$

tiesioginį asimptotinį skleidinį.

$$x(t;\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon\, x_1(t) + O\left(\varepsilon^2\right),$$

$$\left(x_0 + \varepsilon\, x_1 + O\left(\varepsilon^2\right)\right)^3 = x_0^3 + 3\varepsilon\, x_0^2\left(x_1 + O\left(\varepsilon^2\right)\right) + 3x_0\left(\varepsilon\, x_1 + O\left(\varepsilon^2\right)\right)^2 =$$
$$x_0^3 + 3\varepsilon\, x_0^2 x_1 + O\left(\varepsilon^2\right).$$

$$x_0'' + x_0 = 0,$$

$$x_1'' + x_1 + x_0^3 = 0,$$

$$x_0\,(t\ ) = C_1^0 \sin t + C_2^0 \cos t = a\cos{(t+\varphi)},$$

$$x_1'' + x_1 = -a^3\cos^3{(t+\varphi)} = -\frac{a^3}{4}\left(3\cos{(t+\varphi)} + \cos{(3t+3\varphi)}\right).$$

$$x_1\,(t\ ) = C_1^1 \sin t + C_2^1 \cos t - \frac{3a^3 t}{8}\sin{(t+\varphi)} + \frac{a^3}{32}\cos{(3t+3\varphi)}.$$

0.5 pavyzdys. Savaiminiai virpesiai (svyravimai su susižadinimu)

$$x'' + x + \varepsilon\left(x' - \frac{1}{3}\,\left(x'\right)^3\right) = 0$$

0.6 pavyzdys. Kvadratiniai ir kubiniai netiesiškumai

$$x'' + x + \alpha\, x^2 + \beta\, x^3 = 0$$

Nagrinėjami mažos amplitudės svyravimai:

$$x(t;\varepsilon) = \varepsilon\, x_1\,(t) + \varepsilon^2\, x_2\,(t) + \cdots$$

0.7 pavyzdys. Priverstiniai svyravimai

$$x'' + x + \varepsilon\left(x^3 + \alpha\, u'\right) = A\cos\left(\omega\, t\right).$$

0.8 pavyzdys. Daugiadažniai sužadinimai

$$x'' + x + \varepsilon\left(x^2 + \alpha\, u'\right) = A_1\cos\left(\omega_1\, t\right) + A_2\cos\left(\omega_2\, t\right).$$

0.9 pavyzdys. Matjė lygtis

$$x'' + x + \varepsilon\cos\left(\omega\, t\right)x = 0.$$

0.2. Kelių mastelių metodas

Metodo idėja – ieškoti sprendinio pavidalu

$$x(t;\varepsilon) = X\left(T_0, T_1, \ldots, T_m; \varepsilon\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^k X_k\left(T_0, T_1, \ldots, T_m\right) + O\left(\varepsilon T_m\right).$$

Čia T_j – skirtingi laiko t masteliai:

$$T_0 = t,\ T_1 = \varepsilon t,\ T_2 = \varepsilon^2 t,\ T_3 = \varepsilon^3 t,\ \ldots$$

Diferencijavimo taisyklė:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \cdots$$

0.2.1. Dviejų mastelių metodas

Pažymėkime „lėtąjį“ laiką $\tau = \varepsilon\, t$ ir nagrinėsime funkciją $y(t;\varepsilon) = Y(t,\tau)$. Tada

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial \tau},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial^2 t} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 Y}{\partial \tau\, \partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial^2 \tau}.$$

0.10 pavyzdys. Tiesinis osciliatorius su slopinimu

$$y'' + y + \varepsilon\, y' = 0.$$

$$y(t;\varepsilon) = Y(t,\tau,\varepsilon) = Y_0(t,\tau) + \varepsilon Y_1(t,\tau) + \cdots$$

$$\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \tau} + Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon \frac{\partial Y_0}{\partial t} + \cdots = 0.$$

Funkcijai $Y_0(t,\tau)$ rasti gauname lygtį

$$\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + Y_0 = 0,$$

kurios bendrasis sprendinys yra

$$Y_0(t,\tau) = a(\tau)\cos(t + \psi(\tau)).$$

Sudarome lygtį funkcijai $Y_1(t,\tau)$ ieškoti:

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + Y_1 = -2\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial Y_0}{\partial t} =$$

$$-2\left(-a' \sin(t+\psi) - a\cos(t+\psi)\,\psi'\right) + a\sin(t+\psi).$$

Norėdami panaikinti sekuliariuosius narius turime pareikalauti

$$\begin{array}{l} 2a' \sin(t+\psi) + a\sin(t+\psi), \\ 2a\cos(t+\psi)\psi' = 0. \end{array}$$

Taigi $\psi(\tau) = \psi - const$, $a' = -\frac{1}{2}a$, $a(\tau) = Ce^{-\frac{\tau}{2}}$ ir todėl

$$Y_0(t,\tau) = Ce^{-\frac{\tau}{2}} \cos(t+\psi).$$

0.3 pratimas. Raskite funkciją Y_1.

0.11 pavyzdys. Diufingo lygtis

$$y'' + y + \varepsilon y^3 = 0.$$

$$y(t;\varepsilon) = Y(t,\tau,\varepsilon) = Y_0(t,\tau) + \varepsilon Y_1(t,\tau) + \cdots$$

$$\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \tau} + Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon\left(Y_0\right)^3 + \cdots = 0.$$

Lygties

$$\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + Y_0 = 0$$

bendrasis sprendinys

$$Y_0\left(t,\tau\right) = C_0\left(\tau\right)e^{it} + \overline{C}_0\left(\tau\right)e^{-it}.$$

Funkcijai $Y_1(t,\tau)$ rasti sprendžiame lygtį

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + Y_1 = -2\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \tau} - \left(Y_0\right)^3 =$$

$$-2i\left(C_0'e^{it} - \overline{C}_0'e^{-it}\right) - \left(C_0^3e^{3it} + 3C_0^2\overline{C}_0e^{it} + 3C_0\overline{C}_0^2e^{-it} + \overline{C}_0^3e^{-3it}\right).$$

Asimptotinis skleidinys neturės sekuliariųjų narių, kai e^{it} ir e^{-it} koeficientai lygūs nuliui. Taigi

$$\begin{array}{l} 2iC_0' + 3C_0^2\overline{C}_0 = 0, \\ 2i\overline{C}_0' - 3C_0\overline{C}_0^2 = 0. \end{array}$$

Pažymėję $C_0(\tau) = a(\tau) + ib(\tau)$, turime

$$i(a' + ib') + \tfrac{3}{2}(a+ib)^2(a-ib) = 0,$$

$$i(a' - ib') - \tfrac{3}{2}(a+ib)(a-ib)^2 = 0.$$

Iš čia gauname

$$\begin{aligned} a' &= -\tfrac{3}{2}b(a^2+b^2), \\ b' &= \tfrac{3}{2}a(a^2+b^2). \end{aligned}$$

Todėl $a(\tau) = C\cos(\omega\tau + \psi)$, $b(\tau) = C\sin(\omega\tau+\psi)$, $\omega C = \frac{3}{2}C^3$. Šaknis $C = 0$ neleidžia rasti bendrojo sprendinio. Asimptotinį skleidinį gauname, kai $C = \pm\sqrt{\frac{2\omega}{3}}$. Taigi

$$C_0(\tau) = \pm C e^{\frac{3C^2\tau}{2}+\psi}$$

ir

$$Y_0\,(t,\tau) = \pm 2C\cos\left(t + \frac{3C^2}{2}\tau + \psi\right)$$

arba

$$Y_0\,(t,\tau) = a\cos\left(t + \frac{3a^2}{8}\tau + \psi\right).$$

0.2.2. Trijų mastelių metodas

0.12 pavyzdys. Lygtis su kvadratiniais ir kubiniais netiesiškumais

$$y'' + y + \alpha y^2 + \beta y^3 = 0.$$

$$y(t;\varepsilon) = \varepsilon y_1(t,\tau,T) + \varepsilon^2 y_2(t,\tau,T) + \cdots, \ \tau = \varepsilon t, \ T = \varepsilon^2 t$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon y_{1t} + \varepsilon^2 y_{1\tau} + \varepsilon^3 y_{1T} + \varepsilon^2 y_{2t} + \varepsilon^3 y_{2\tau} + \varepsilon^4 y_{2T} + \cdots$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon y_{1tt} + 2\varepsilon^2 y_{1\tau t} + \varepsilon^3 y_{1\tau\tau} + 2\varepsilon^3 y_{2t\tau} + 2\varepsilon^4 y_{2Tt} + \varepsilon^4 y_{2\tau\tau} + 2\varepsilon^5 y_{2T\tau} + \varepsilon^6 y_{2TT} + \cdots$$

$$y''_{1tt} + y_1 = 0,$$

$$y''_{2tt} + y_2 = -2y_{1t\tau} - \alpha y_1^2,$$

$$y''_{3tt} + y_3 = -y_{1\tau\tau} - 2y_{1tT} - 2y_{2t\tau} - 2\alpha y_1 y_2 - \beta y_1^2.$$

$$y_1(t,\tau,T) = C(\tau,T)e^{it} + \overline{C}(\tau,T)e^{-it}.$$

$$y_{1t\tau} = i\left(C_\tau e^{it} - \overline{C}_\tau e^{-it}\right).$$

$$y_1^2 = C^2 e^{2it} + C\overline{C} + \overline{C}^2 e^{-2it}.$$

Skleidinys neturės sekuliariųjų narių, jei $C_\tau = 0$ arba $C = C(T)$. Tada

$$y''_{2tt} + y_2 = -\alpha\left(C^2 e^{2it} + C\overline{C} + \overline{C}^2 e^{-2it}\right)$$

ir šios lygties atskirasis sprendinys yra

$$y_2 = \frac{\alpha}{3}\left(C^2 e^{2it} + \overline{C}^2 e^{-2it}\right) - 2\beta C\overline{C}.$$

Funkcijos y_2 dalinė išvestinė $y_{2t\tau} = 0$. Taigi

$$y''_{3tt} + y_3 = Ae^{it} + \overline{A}e^{-it} - 2i\left(A'e^{it} - \overline{A}'e^{-it}\right) -$$

$$-2\alpha\left(\frac{\alpha}{3}\left(A^2e^{2it} + \overline{A}^2e^{-2it}\right) - 2\alpha A\overline{A}\right)\cdot\left(Ae^{it} + \overline{A}e^{-it}\right) -$$

$$-\beta\left(A^3e^{i3t} + 3A^2\overline{A}e^{it} + 3A\overline{A}^2e^{-it} + \overline{A}^3e^{-i3t}\right)$$

Skleidinys neturės sekuliariųjų narių, kai

$$-2iA' + \left(\left(4 - \frac{2}{3}\right)\alpha^2 - 3\beta\right)A^2\overline{A} = 0.$$

Lygties sprendinio ieškome pavidalu

$$A(T) = a(T)e^{ib(T)}$$

Turime

$$A' = \left(a' + iab'\right)e^{ib}$$

Todėl

$$-2i\left(a' + iab'\right)e^{ib} + \left(\frac{10}{3}\alpha^2 - 3\beta\right)a^3e^{ib} = 0$$

Iš čia gauname

$$-2ia' = 0,\ 2ab' + \left(\frac{10}{3}\alpha^2 - 3\beta\right)a^3 = 0$$

Taigi

$$a(T) = a - const,\ b(T) = -\left(\frac{5}{3}\alpha^2 - \frac{3}{2}\beta\right)a^2T + b_0$$

ir

$$y_1(t,T) = ae^{it}e^{ib} + ae^{-it}e^{-ib} = 2a\cos(t+bt) =$$
$$2a\cos\left(t - \left(\frac{5}{3}\alpha^2 - \frac{3}{2}\beta\right)a^2T + b_0\right) =$$
$$\tilde{a}\cos\left(t + \left(\frac{3}{8}\beta - \frac{5}{12}\alpha^2\right)\tilde{a}^2\varepsilon^2 t + b_0\right)$$

0.2.3. Metodo modifikavimas – skleidimas pagal du kintamuosius

0.13 pavyzdys.

$$y'' + \varepsilon y' + y = 0$$

Asimptotinis skleidinys ieškomas tokiu pavidalu:

$$y = y_0(\tau,\eta) + \varepsilon y_1(\tau,\eta) + \varepsilon^2 y_2(\tau,\eta) + \cdots$$
$$\tau = \varepsilon t,\ \eta = \left(1 + \varepsilon^2 w_2 + \varepsilon^3 w_3 + \cdots + \varepsilon^M w_M\right)t$$

Paimsime $M = 2$. Tada

$$y' = \varepsilon y_{0\tau} + (1+\varepsilon^2 w_2)y_{0\eta} + \cdots$$
$$y'' = \varepsilon^2 y_{0\tau\tau} + 2\varepsilon(1+\varepsilon^2 w_2)y_{0\eta\tau} + (1+\varepsilon^2 w_2)^2 y_{0\eta\eta} + \cdots$$

Gauname

$$y_{0\eta\eta} + y_0 = 0,\ y_0 = A(\tau)e^{i\eta} + \overline{A}(\tau)e^{-i\eta}$$

Antroji lygtis:

$$y_{1\eta\eta} + y_1 = -2y_{0\tau\eta} - y_\eta$$

Išvestinės:

$$y_{0\eta} = i\left(Ae^{i\eta} - \overline{A}e^{-i\eta}\right)$$
$$y_{0\eta\tau} = i\left(A'e^{i\eta} - \overline{A}'e^{-i\eta}\right)$$

Sekuliariųjų narių naikinimas:

$$-2iA' - iA = 0,\ -2i\overline{A}' - i\overline{A} = 0$$

Gauname $A(\tau) = \overline{A}(\tau) = ae^{-\frac{\tau}{2}}$.

Trečioji lygtis:

$$y_{2\eta\eta} + y_2 + 2\omega_2 y_{0\eta\eta} + 2y_{\tau\eta} + y_{\tau\tau} + y_{1\eta} + y_{0\tau} = 0$$

Gauname

$$y_0 = ae^{-\frac{\tau}{2}}\left(e^{i\eta} + e^{-i\eta}\right)$$

Naikiname sekuliariuosius narius:

$$-\frac{a}{4} - 2\omega_0(-a) - \left(-\frac{a}{2}\right) = 0,\ \omega = -\frac{1}{2}$$

Taigi

$$y_0 = ae^{-\frac{\tau}{2}}\cos\left(t - \frac{1}{2}\varepsilon^2 t + \varphi\right)$$

0.3. Linštedto – Puankarė metodas (A.Lindstedt, H.Poincaré)

0.14 pavyzdys. Diufingo lygtis

$$y'' + y + \varepsilon y^3 = 0$$

Metodo idėja – kintamųjų keitinys:

$$y(t;\varepsilon) = Y(z;\varepsilon) = Y_0(z) + \varepsilon Y_1(z) + \varepsilon^2 Y_2(z) + \cdots$$

$$z = wt,\ w = 1 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \cdots$$

Išvestinės:

$$y' = wY',\ y'' = w^2 Y''$$

Gauname lygtį:

$$w^2 Y'' + Y + \varepsilon Y^3 = 0$$

Iš čia

$$\left(1 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \cdots\right)^2 \left(Y_0'' + \varepsilon Y_1'' + \varepsilon^2 Y_2'' + \cdots\right) +$$

$$+ Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \cdots + \varepsilon\left(Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \cdots\right)^3 = 0$$

Taigi

$$Y_0'' + Y_0 = 0$$

$$Y_1'' + Y_1 = -Y_0^3 - 2w_1 Y_0''$$

Turime

$$Y_0(z) = Ce^{iz} + \overline{C}e^{-iz} = a\cos(z + \varphi)$$

$$Y_0^3 = a^3\cos^3(z + \varphi) = \frac{a^3}{4}\left(3\cos(z + \varphi) + \cos 3(z + \varphi)\right)$$

$$Y_0'' = -a\cos(z+\varphi)$$

Naikiname sekuliariuosius narius:

$$-\frac{3a^3}{4}\cos(z+\varphi) + 2w_1 a\cos(z+\varphi) = 0$$

Iš čia

$$w_1 = \frac{3a^2}{8}$$

$$y(t;\varepsilon) \approx a\cos\left(t + \frac{3a^2\varepsilon t}{8} + \varphi\right)$$

0.15 pavyzdys. Tiesinis osciliatorius

$$y'' + y + \varepsilon y' = 0$$

$$w^2 Y'' + Y + \varepsilon Y' = 0$$

$$Y_0'' + Y_0 = 0$$

$$Y_1'' + Y_1 = -Y_0' - 2w_1 Y_0'' =$$

$$= -iCe^{iz} + i\overline{C}e^{-iz} + 2w_1\left(Ce^{iz} + \overline{C}e^{-iz}\right)$$

Gauname $w_1 = \frac{i}{2}$ ir $w_1 = -\frac{i}{2}$. Taigi sekuliariųjų narių panaikinti nepavyksta ir todėl metodas neleidžia sukonstruoti tolygiai tinkamos ilgajame laiko intervale $t \in \left[0, O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$ asimptotikos.

0.16 pavyzdys. Lygtis su kvadratiniais ir kubiniais netiesiškumais

$$y'' + y + \alpha y^2 + \beta y^3 = 0$$

$$y(t;\varepsilon) = \varepsilon Y_1(z) + \varepsilon^2 Y_2(z) + \cdots$$

$$\left(1 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \cdots\right)^2\left(\varepsilon Y_1'' + \varepsilon^2 Y_2'' + \cdots\right) +$$

$$\alpha\left(\varepsilon Y_1(z) + \varepsilon^2 Y_2(z) + \cdots\right)^2 + \beta\left(\varepsilon Y_1(z) + \varepsilon^2 Y_2(z) + \cdots\right)^3 = 0$$

Gauname

$$Y_1'' + Y_1 = 0$$

$$Y_2'' + Y_2 = -2w_1 Y_1'' - \alpha Y_1^2$$

Sekuliariųjų narių nebus, jei $w_1 = 0$. Taigi $y(t;\varepsilon) \approx \varepsilon a\cos(t+\varphi)$.

0.4. Vidurkinimo metodas

0.4.1. Kintamųjų variacija

0.17 pavyzdys. Diufingo lygtis

$$y'' + y' + \varepsilon y^3 = 0$$

Kai $\varepsilon = 0$, bendrasis sprendinys

$$y(t) = a\cos(t+\varphi)$$

Pastebėkime, kad

$$y'(t) = -a\sin(t+\varphi) \tag{3}$$

Tarkime, kad $y(t;\varepsilon) = a(t;\varepsilon)\cos(t+\varphi(t;\varepsilon))$ ir pareikalaukime, kad $y'(t;\varepsilon)$ būtų lygi (3) reiškiniui.

Gauname

$$a'\cos(t+\varphi) - a\varphi'\sin(t+\varphi) = 0 \tag{4}$$

Tada

$$y'' = -a'\sin(t+\varphi) - a\cos(t+\varphi) - a\varphi'\cos(t+\varphi)$$

ir įstatę y'' į Diufingo lygtį turime

$$-a'\sin(t+\varphi) - a\varphi'\cos(t+\varphi) = -\varepsilon a^3\cos^3(t+\varphi) \tag{5}$$

Sprendžiame (4), (5) sistemą Kramerio metodu:

$$D = \begin{vmatrix} \cos(t+\varphi) & -a\cos(t+\varphi) \\ -\sin(t+\varphi) & -a\cos(t+\varphi) \end{vmatrix} = -a$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -a\cos(t+\varphi) \\ -\varepsilon a^3\cos^3(t+\varphi) & -a\cos(t+\varphi) \end{vmatrix},\ D_2 \begin{vmatrix} \cos(t+\varphi) & 0 \\ -\sin(t+\varphi) & -\varepsilon a^3\cos^3(t+\varphi) \end{vmatrix}$$

$$a' = \frac{D_1}{D} = \varepsilon a^3\cos^3(t+\varphi)\sin(t+\varphi)\,,\ \varphi' = \frac{D_2}{D} = \varepsilon a^2\cos^4(t+\varphi) \tag{6}$$

0.4.2. Vidurkinimas

$$f(t) = \sum_{k\in Z} f_k e^{ikt}$$

$$\int_0^t f(s)\,ds = f_0 t + \sum_{k\neq 0} f_k \frac{e^{ikt}}{ik}$$

$$f_0 = \langle f \rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\,ds$$

Nagrinėsime lygtį

$$x' = \varepsilon f(x,t) \tag{7}$$

ir ieškosime jos asimptotinio skleidinio tokiu pavidalu

$$x(t;\varepsilon) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau,t) + \cdots, \ \ \tau = \varepsilon t$$

Skleidinys neturės sekuliariųjų narių, jei

$$\frac{dx_0(\tau)}{d\tau} =< f >= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x_0,s)\,ds$$

Raskime (6) sistemos asimptotinį sprendinį vidurkinimo metodu:

$$\frac{da(\tau)}{d\tau} = a^3 \langle \sin(t+\varphi)\cos(t+\varphi)\rangle = a^3 \left\langle \frac{1}{4}\sin 2(t+\varphi) + \frac{1}{8}\sin 4(t+\varphi)\right\rangle = 0$$

$$\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} = a^2 \left\langle \cos^4(t+\varphi)\right\rangle = \frac{a^2}{8}\langle 3 + 4\cos 2(t+\varphi) + \cos 4(t+\varphi)\rangle = \frac{3a^2}{8}$$

Taigi $a(\tau) = a - const$, $\varphi(\tau) = \frac{3a^2\tau}{8} + \varphi_0$ ir

$$x(t;\varepsilon) \approx a\cos\left(t + \frac{3a^2\varepsilon t}{8} + \varphi_0\right)$$

0.18 pavyzdys. Tiesinis osciliatorius

$$y'' + \varepsilon y' + y = 0, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0$$

Ieškome sprendinio $x(t;\varepsilon) = a(t;\varepsilon)\cos(t + \varphi(t;\varepsilon))$ iš sistemos

$$a'\cos(t+\varphi) - a\varphi'\sin(t+\varphi) = 0$$

$$a'\sin(t+\varphi) + a\varphi'\cos(t+\varphi) = -\varepsilon a\sin(t+\varphi)$$

Taigi

$$a' = -\varepsilon a \sin^2(t+\varphi), \ \ \varphi' = -\varepsilon\sin(t+\varphi)\cos(t+\varphi)$$

ir gauname

$$\frac{da(\tau)}{d\tau} = -a\left\langle sin^2(t+\varphi)\right\rangle = -\frac{a}{2}$$

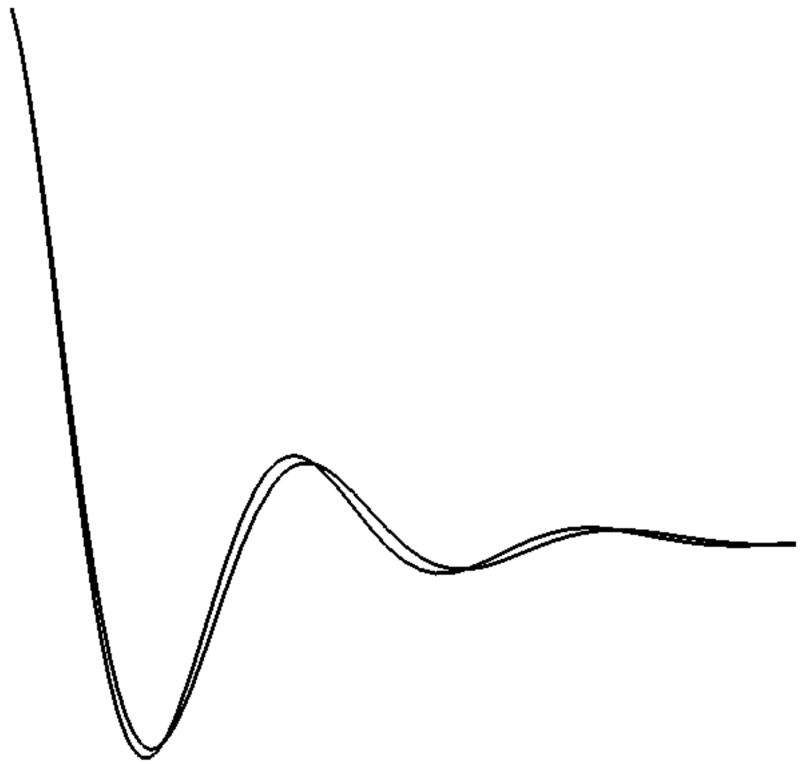
$$\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} = -\langle\sin(t+\varphi)\cos(t+\varphi)\rangle = 0$$

Arba

$$y(t;\varepsilon) \approx ae^{-\frac{\varepsilon t}{2}}\cos(t+\varphi_0), \ a = 1, \ \varphi_0 = 0$$

T. y. $y(t;\varepsilon) \approx e^{-\frac{\varepsilon t}{2}}\cos t$

Asimptotikos analizė



2 pav. Tikslusis sprendinys ir jo asimptotinis artinys

$$y(t;\varepsilon) = e^{-\frac{\varepsilon t}{2}} \cos\left(\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}\, t\right),$$

$$Y(t;\varepsilon) = e^{-\frac{\varepsilon t}{2}} \cos t,\ t = \frac{1}{\varepsilon}$$

ε	y	Y	$\lvert y-Y\rvert$	$\frac{\lvert y-Y\rvert}{\varepsilon}$
0.1	-0.5130098	-0.5089226	0.0040872	$4.1 \cdot 10^{-2}$
0.01	0.5226385	0.5230228	0.0003843	$3.8 \cdot 10^{-2}$
0.001	0.3411628	0.3411002	0.0000626	$6.3 \cdot 10^{-2}$
0.0001	-0.5775137	-0.5775114	0.0000023	$2.3 \cdot 10^{-2}$

0.5. Diufingo lygtis su žadinimu

0.5.1. Rezonansinis atvejis

$$y'' + y + \varepsilon(y^3 + \alpha\cos t) = 0$$

Kelių mastelių metodas

$$y(t;\varepsilon) = y_0(\tau,t) + \varepsilon y_1(\tau,t) + \cdots,\ \tau = \varepsilon t$$

$$y_0' = y_{0t}' + \varepsilon\left(y_{0\tau}' + y_{1t}'\right) + O\left(\varepsilon^2\right)$$

$$y_0'' = y_{0tt}'' + \varepsilon\left(2y_{0\tau t}'' + y_{1tt}''\right) + O\left(\varepsilon^2\right)$$

$$y_{0tt}'' + y_0 = 0$$
$$y_{1tt}'' + y_1 + 2y_{0\tau t}'' + (y_0)^3 + \alpha\cos t = 0$$

$$y_0(\tau,t) = C(\tau)e^{it} + \overline{C}(\tau)e^{-it}$$

$$y_{0\tau t}'' = iC'e_{it} - i\overline{C}'e^{-it}$$

$$y_{1tt}'' + y_1 + 2i\left(C'e^{it} - \overline{C}'e^{-it}\right) +$$

$$+C^3e^{3it} + 3C^2\overline{C}e^{it} + 3C\overline{C}^2e^{-it} + \overline{C}^3e^{-3it} + \frac{\alpha}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) = 0$$

Naikiname sekuliariuosius narius:

$$2iC'e^{it} + 3C^2\overline{C}e^{it} + \frac{\alpha}{2}e^{it} = 0$$

$$-2i\overline{C}'e^{-it} + 3\overline{C}^2Ce^{-it} + \frac{\alpha}{2}e^{-it} = 0$$

Sprendinio ieškome tokiu pavidalu

$$C(\tau) = a(\tau)e^{ib(\tau)}$$

Tada

$$\overline{C}(\tau) = a(\tau)e^{-ib(\tau)}$$

$$C'(\tau) = \left(a' + iab'\right)e^{ib}$$

Įstatome šiuos reiškinius į lygtį:

$$2i\left(a' + iab'\right) + 3a^3 + \frac{\alpha}{2} = 0$$

Gauname

$$a' = 0,\ -2b'a + 3a^3 + \frac{\alpha}{2} = 0$$

Vidurkinimo metodas

$$y(t;\varepsilon) = a(t;\varepsilon)\cos(t+\varphi(t;\varepsilon))$$

$$a'\cos(t+\varphi) - a\varphi'\sin(t+\varphi) = 0$$

$$y' = -a\sin(t+\varphi)$$

$$y'' = -a'\sin(t+\varphi) - a(1+\varphi')\cos(t+\varphi)$$

$$-a'\sin(t+\varphi) - a\varphi'\cos(t+\varphi) + \varepsilon(a^3\cos^3(t+\varphi) + \alpha\cos t) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \cos(t+\varphi) & -a\sin(t+\varphi) \\ -a\sin(t+\varphi) & -a\cos(t+\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon\left(a^3\cos^3(t+\varphi) + \alpha\cos t\right) \end{pmatrix}$$

Spendžiame tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{array}{l} a' = \varepsilon\sin(t+\varphi)\left(a^3\cos^3(t+\varphi) + \alpha\cos t\right) \\ \varphi' = \varepsilon\left(a^2\cos^4(t+\varphi) + \frac{\alpha}{a}\cos^2 t\right) \end{array}$$

0.5.2. Artimas rezonansui atvejis

$$y'' + y + \varepsilon(y^3 + \alpha\cos((1+\sigma\varepsilon)t)) = 0$$

Perrašome lygtį

$$y'' + y + \varepsilon(y^3 + \alpha(\cos t\cos(\sigma\tau) - \sin t\sin(\sigma\tau))) = 0$$

Kartojame kelių mastelių pertvarkius:

$$y''_{1tt} + y_1 + 2y''_{0\tau t} + (y_0)^3 + \alpha(\cos t\cos(\sigma\tau) - \sin t\sin(\sigma\tau)) = 0$$

$$2i\left(a' + iab'\right) + 3a^3 + \frac{\alpha}{2}\left(\cos(\sigma\tau) - \frac{1}{i}\sin(\sigma\tau)\right) = 0$$

$$a'(\tau) = -\tfrac{\alpha}{4}\sin(\sigma\tau)$$

$$b'(\tau) = \tfrac{3}{2}a^2 + \tfrac{\alpha}{4a}\cos(\sigma\tau)$$

0.4 pratimas. Išnagrinėkite atvejį, kai $\omega \approx 3$

$$y'' + y + \varepsilon\left(y^3 + \alpha\cos(\omega t)\right) = 0$$

0.6. Vidurkinimo metodo pagrindimas

Nagrinėsime silpnai netiesinę sistemą, užrašyta standartine forma

$$\frac{dx_j}{dt} = \varepsilon f_j\left(t, x_1, \ldots, x_n\right), \ j = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

Tarkime, kad funkcijos $f_j(t, x)$ $(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n))$ yra tolydžiai diferencijuojamos ir periodinės pagal t:

$$f_j\left(t + 2\pi, x\right) \equiv f_j\left(x, t\right) \tag{9}$$

ir

$$f_j\left(t, x\right) = \sum_{k \in Z} f_k\left(x\right) e^{ikt}$$

Pažymėkime

$$F_{jk}^{\left(m_1, \ldots, m_n\right)} = \max_{j=1,2,\ldots,n} \max_{\substack{a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1 \\ a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2 \\ \cdots \\ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n}} \left| \frac{\partial^{m_1 + \cdots + m_n} f_k\left(x\right)}{\partial^{m_1} x_1 \cdots \partial^{m_n} x_n} \right|$$

$$F_{jk}^d = \max_{0 \leqslant m_1 \leqslant d, \ldots 0 \leqslant m_n \leqslant d} F_{jk}^{\left(m_1, \ldots, m_n\right)}$$

Pareikalaukime eilučių

$$F_{j0}^d + \sum_{k=1}^{\infty} F_{jk}^d + \sum_{k=1}^{\infty} F_{j,-k}^d, \ d = 0, 1 \tag{10}$$

konvergavimo.

Užrašykime (8) sistemos suvidurkintą sistemą

$$\frac{d\overline{x}_j}{dt} = \varepsilon \left\langle f_j\left(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\right)\right\rangle, \ j = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

$$\left\langle f_j \right\rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f_j(t, \overline{x})\, dt$$

Spręsime (8) ir (11) sistemas, esant toms pačioms pradinėms sąlygoms:

$$x_j\left(t; \varepsilon\right)\Big|_{t=0} = \overline{x}_j\left(t; \varepsilon\right)\Big|_{t=0} = x_j^0, \ j = 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$

0.1 teorema. Tarkime, kad
1) uždaviniai (8), (12) ir (11), (12), kai $t \in \left[0, \frac{\tau_0}{\varepsilon}\right]$ turi sprendinius x_j, $\overline{x}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

$$a_j \leqslant x_j\,(t;\varepsilon) \leqslant b_j,\ a_j \leqslant \overline{x}_j\,(t;\varepsilon) \leqslant b_j;$$

2) galioja (9) periodiškumo sąlyga;
3) $f_j(t,x)$ tolydžiai diferencijuojamos ir(10) eilutės konverguoja.
Tada egzistuoja tokia teigiama konstanta C, kad

$$\forall t \in \left[0, \frac{\tau_0}{\varepsilon}\right] \max_{j=1,2,\ldots,n} \left|x_j\,(t;\varepsilon) - \overline{x}_j\,(t;\varepsilon)\right| \leqslant C\varepsilon \tag{13}$$

Įrodymas. Iš (9) periodiškumo sąlygos, gauname

$$\left\langle f_j \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_j(t,\overline{x})\,dt = f_{j0}\left(\overline{x}\right).$$

Turime įvertį

$$\left|x_j\,(t;\varepsilon) - \overline{x}\,(t;\varepsilon)\right| = \varepsilon\left|\int_0^t \left(f_j - \left\langle f_j\right\rangle\right)\,dt\right| =$$

$$\varepsilon\left|\sum_{k\neq 0}\int_0^t f_{jk}\left(x(s;\varepsilon)\right)e^{iks}\,ds\right| \leqslant$$

$$\varepsilon\sum_{k\neq 0}\left|\frac{1}{ik}\int_0^t f_{jk}\,de^{iks}\right| \leqslant \varepsilon\sum_{k\neq 0}\frac{\left|f_{jk}(x(t;\varepsilon))\right| + \left|f_{jk}(x_0)\right|}{|k|} +$$

$$+\varepsilon\sum_{k\neq 0}\frac{1}{|k|}\left|\int_0^t \sum_{m=1}^n \frac{\partial f_{jk}}{\partial x_m}\frac{dx_m}{dt}\,ds\right|.$$

Pastebėję, kad $x'_j = O(\varepsilon)$, gauname

$$\left|x_j\,(t;\varepsilon) - \overline{x}\,(t;\varepsilon)\right| \leqslant \varepsilon F^0 + \varepsilon F^1 n\tau_0 = \varepsilon C.$$

Čia

$$F^0 = 2\max_j\sum_{k\neq 0}F_{jk},\ F^1 = \cdots$$

0.19 pavyzdys.

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x \sin t,\ x(0) = 1$$

Tikslusis sprendinys

$$x(t;\varepsilon) = e^{-\varepsilon \cos t}$$

Suvidurkintoji lygtis

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = 0,\ \overline{x}(0) = 1.$$

Taigi $\overline{x}(t;\varepsilon) = 1$ ir

$$\left|e^{-\varepsilon\ \cos t} - 1\right| = \left|-\varepsilon \cos t + \frac{\varepsilon^2 \cos^2 t}{2} - \frac{\varepsilon^3 \cos^3 t}{6} + \cdots\right| < \varepsilon$$

0.20 pavyzdys.

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x \sin^2 t,\ x(0) = 1.$$

Tikslusis sprendinys

$$x(t;\varepsilon) = e^{\varepsilon\left(\frac{t}{2} - \frac{\cos 2t}{4}\right)}.$$

Suvidurkintoji lygtis

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \varepsilon \frac{\overline{x}}{2},\ \overline{x}(0) = 1.$$

Jos sprendinys

$$\overline{x}(t;\varepsilon) = e^{\frac{\varepsilon t}{2}}.$$

Turime

$$\left|e^{\varepsilon\left(\frac{t}{2} - \frac{\cos 2t}{4}\right)} - e^{\frac{\varepsilon t}{2}}\right| = e^{\frac{\varepsilon t}{2}}\left(1 + O(\varepsilon)\right).$$

0.7. Daugiadažniai svyravimai

0.7.1. Rezonansai ir mažieji vardikliai

$$y'' + y = +a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t + \varepsilon y^2,$$

$$w_1 \neq 1,\ w_2 \neq 1$$

Mažojo parametro metodas

$$y(y;\varepsilon) = y_0\left(t\right) + \varepsilon y_1\left(t\right) + \varepsilon^2 y_2\left(t\right) + \cdots$$

$$y'' = y_0'' + \varepsilon y_1'' + \varepsilon^2 y_2'' + \cdots$$

$$y_0\left(t\right) = A_0 \cos\left(t + \varphi_0\right) + C_{01} \cos \omega_1 t + S_{01} \sin \omega_1 t + C_{02} \cos \omega_2 t + S_{02} \sin \omega_1 t$$

$$C_{01} = \frac{a_1}{1-\omega_1^2},\ S_{01} = 0,\ C_{02} = \frac{a_2}{1-\omega_2^2},\ S_{01} = 0$$

$$y_1'' + y_1 = y_0^2 =$$

$$= A_0^2 \cos^2\left(t + \varphi_0\right) + C_{01}^2 \cos^2 \omega_1 t + C_{02}^2 \cos^2 \omega_2 t +$$

$$+ 2A_0 C_{01} \cos\left(t + \varphi_1\right) \cos \omega_1 t + 2A_0 C_{02} \cos\left(t + \varphi_0\right) \cos \omega_2 t + 2C_{01} C_{02} \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t =$$

$$= \frac{A_0^2}{2}\left(1 + \cos\left(t + \varphi_0\right)\right) + \frac{C_{01}^2}{2}\left(1 + \cos \omega_1 t\right) + \frac{C_{02}^2}{2}\left(1 + \cos \omega_2 t\right) +$$

$$+ A_0 C_{01}\left(\cos\left((1+\omega_1)t + \varphi_0\right) + \cos\left((1-\omega_1)t + \varphi_0\right)\right) +$$

$$+ A_0 C_{02}\left(\cos\left((1+\omega_2)t + \varphi_0\right) + \cos\left((1-\omega_2)t + \varphi_0\right)\right) +$$

$$+ C_{01} C_{02}\left(\cos\left((\omega_1 + \omega_2)t\right) + \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t\right)\right)$$

Tarkime, kad

$$\omega_1 \neq \pm 2,\ \omega_2 \neq \pm 2,\ \omega_1 \pm \omega_2 \neq \pm 1$$

$$y_1\left(t\right) = \frac{A_0^2 + C_{01}^2 + C_{02}^2}{2} t + A_1 t \cos\left(t + \varphi_0\right) + A_{11} \cos \omega_1 t + A_{12} \cos \omega_2 t +$$

$$+ B_{11} \cos\left((1+\omega_1)t + \varphi_0\right) + C_{11} \cos\left((1-\omega_1)t + \varphi_0\right) +$$

$$+ B_{12} \cos\left((1+\omega_2)t + \varphi_0\right) + C_{12} \cos\left((1-\omega_2)t + \varphi_0\right) +$$

$$D_1 \cos\left((\omega_1 + \omega_2)t\right) + E_1 \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t\right)$$

$$B_{11} = -\frac{A_0 C_{01}}{\omega_1\left(2 + \omega_1\right)},\ C_{11} = \frac{A_0 C_{01}}{\omega_1\left(2 - \omega_1\right)}$$

$$B_{12} = -\frac{A_0 C_{02}}{\omega_2\left(2 + \omega_2\right)},\ C_{12} = \frac{A_0 C_{02}}{\omega_2\left(2 - \omega_2\right)}$$

$$D_1 = \frac{C_{01} C_{02}}{\left(1 - \omega_1 - \omega_2\right)\left(1 + \omega_1 + \omega_2\right)}$$

$$E_1 = \frac{C_{01} C_{02}}{\left(1 - \omega_1 + \omega_2\right)\left(1 + \omega_1 - \omega_2\right)}$$

0.7.2. Kelių mastelių metodas

$$y(t;\varepsilon) = y_0(\tau,t) + \varepsilon y_1(\tau,t) + \varepsilon^2 y_2(\tau,t) + \cdots$$
$$y'' = y''_{0tt} + \varepsilon\left(2y''_{0t\tau} + y''_{1tt}\right) + O\left(\varepsilon^2\right)$$

Atvejis $\omega_1 + \omega_2 \approx 1$

$$y_{0tt} + y_0 = a_1 \cos\omega_1 t + a_2 \cos\omega_2 t$$
$$y_{1tt} + y_1 + 2y_{0t\tau} = y_0^2$$
$$y_0(\tau,t) = A_0(\tau)\cos(t + \varphi_0(\tau)) + A_{01}\cos\omega_1 t + A_{02}\cos\omega_2 t$$
$$A_{01} = \frac{a_1}{1-\omega_1^2},\ A_{02} = \frac{a_2}{1-\omega_2^2}$$
$$y_{1tt} + y_1 = A_0^2\cos^2(t+\varphi_0) + A_{01}^2\cos^2\omega_1 t + A_{02}^2\cos^2\omega_2 t +$$
$$+2A_0A_{01}\cos(t+\varphi_0)\cos\omega_1 t + 2A_0A_{02}\cos(t+\varphi_0)\cos\omega_2 t +$$
$$+2A_{01}A_{02}\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t - 2\left(-A_0'\sin(t+\varphi_0) - A_0\varphi_0'\cos(t+\varphi_0)\right)$$
$$\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t = \frac{1}{2}\left(\cos(\omega_1+\omega_2)t + \cos(\omega_1-\omega_2)t\right)$$

Pažymėkime $\omega_1 + \omega_1 = 1 + \sigma\varepsilon$, $\sigma = O(1)$, $\sigma \neq o(1)$.

$$\cos(\omega_1+\omega_2)t = \cos(t+\sigma\varepsilon t) = \cos(t+\sigma\tau) = \cos t\cos\sigma\tau - \sin t\sin\sigma\tau$$

$$\cos(t+\varphi_0) = \cos t\cos\varphi_0 - \sin t\sin\varphi_0$$
$$\sin(t+\varphi_0) = \sin t\cos\varphi_0 + \cos t\sin\varphi_0$$

Užrašome sekuliariųjų narių naikinimo sąlygą

$$\begin{cases} A_{01}A_{02}\cos\sigma\tau - 2A_0'\sin\varphi_0 + 2A_0\varphi_0'\cos\varphi_0 = 0, \\ -A_{01}A_{02}\sin\sigma\tau + 2A_0'\cos\varphi_0 + 2A_0\varphi_0'\sin\varphi_0 = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Sprendžiame (14) sistemą:

$$A_0'(\tau) = \frac{A_{01}A_{02}}{2}\sin(\sigma\tau+\varphi_0)$$

$$\varphi_0'(\tau) = -\frac{A_{01}A_{02}}{2A_0(\tau)}\cos(\sigma\tau+\varphi_0)$$

Turime

$$A_0' = 0,\ \varphi_0(\tau) = -\sigma\tau,\ A_0 = \frac{A_{01}A_{02}}{2\sigma}$$

Atvejis $\omega_1 - \omega_2 \approx 1$

$$\omega_1 - \omega_2 = 1 + \sigma\varepsilon, \;\; \sigma = O(1), \;\; \sigma \neq o(1)$$

$$\cos\left(\omega_1 - \omega_2\right) t = \cos(t + \sigma\tau)$$

0.7.3. Vidurkinimo metodas

$$y'' + y = a_1 \cos\omega_1 t + a_2 \cos\omega_2 t + \varepsilon y^2$$

Kai $\varepsilon = 0$

$$y(t) = a\cos(t + \varphi) + A_1 \cos\omega_1 t + A_2 \cos\omega_2 t$$

Išvestinė

$$y'\left(t\right) = -a\sin(t + \varphi) - A_1\omega_1 \sin\omega_1 t - A_2\omega_2 \sin\omega_2 t \tag{15}$$

Sprendinio ieškome tokiu pavidalu

$$y(t;\varepsilon) = a(t;\varepsilon)\cos(t + \varphi(t;\varepsilon))$$

ir reikalaujame, kad $y'(t;\varepsilon)$ būtų lygi (15) reiškiniui. Kadangi

$$y'(t;\varepsilon) = a'\cos(t + \varphi) - a(1 + \varphi')\cos(t + \varphi) - A_1\omega_1 \sin\omega_1 t - A_2\omega_2 \sin\omega_2 t,$$

gauname

$$a'\cos(t + \varphi) - a\varphi'\sin(t + \varphi) = 0 \tag{16}$$

ir todėl

$$y''(t;\varepsilon) = -a'\sin(t+\varphi) - (1+\varphi')\cos(t+\varphi) - A_1\omega_1^2\cos(t+\varphi) - A_2\omega_2^2\cos(t+\varphi)$$

Įstatome šį reiškinį į diferencialinę lygtį:

$$-a'\sin(t + \varphi) - a\varphi'\cos(t + \varphi) = \varepsilon F(t, a, \varphi) \tag{17}$$

Čia pažymėta

$$F(t, a, \varphi) = a^2\cos^2(t + \varphi) + a_1^2\cos^2\omega_1 t + a_2^2\cos\omega_2 t +$$

$$+2aA_1\cos(t + \varphi)\cos\omega_1 t + 2aA_2\cos(t + \varphi)\cos\omega_2 t + 2A_1A_2\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t$$

Iš (16), (17) gauname

$$a' = -\varepsilon F(t, a, \varphi)\sin(t + \varphi), \;\; \varphi' = -\frac{\varepsilon}{a}F(t, a, \varphi)\cos(t + \varphi)$$

0.8. Pasienio sluoksnis

Nagrinėsime kraštinį uždavinį su mažuoju **teigiamu** parametru

$$\varepsilon y'' + \left(1-\varepsilon^2\right) y' + (1-\varepsilon)^2 y = 0, \tag{18}$$

$$y(0)=\alpha,\ y(1)=\beta.$$

Nesutrukdytoji lygtis

$$y'+y=0$$

yra pirmosios eilės ir bendruoju atveju viena iš kraštinių sąlygų negalioja. Bendrasis nesutrukdytosios lygties sprendinys

$$y(x)=Ce^{-x}.$$

Tarkime, kad

$$y(1)=Ce^{-1}=\beta.$$

Tada βe^1 ir asimptotinis artinys

$$y(x)=\beta e^{1-x}. \tag{19}$$

Taigi bendruoju atveju

$$y(0)=\beta e^1 \neq \alpha.$$

0.8.1. Tikslusis sprendinys

Sudarome (18) charakteristinę lygtį

$$\varepsilon\lambda^2 + \left(1+\varepsilon^2\right)\lambda + (1-\varepsilon)^2 = 0.$$

Pastebėję, kad

$$\varepsilon\lambda^2 + \left(1+\varepsilon^2\right)\lambda + (1-\varepsilon)^2 = (\varepsilon\lambda + 1 - \varepsilon)\ (\lambda + 1 - \varepsilon),$$

gauname jos šaknis

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\varepsilon}+1,\ \lambda_2 = -1+\varepsilon.$$

Bendrasis sprendinys

$$y(x;\varepsilon) = C_1 e^{-\frac{x}{\varepsilon}+x} + C_2 e^{-x+\varepsilon x}.$$

Iš kraštinių sąlygų gauname

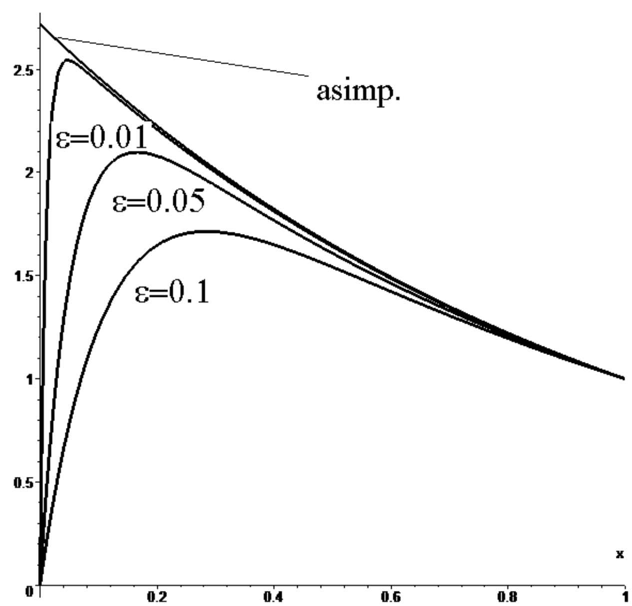
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \alpha \\ C_1 e^{-\frac{1}{\varepsilon}+1} + C_2 e^{-1+\varepsilon} = \beta \end{cases}$$

Sprendžiame tiesinių lygčių sistemą Kramerio metodu:

$$C_1 = \frac{\alpha e^{-1+\varepsilon} - \beta}{e^{-1+\varepsilon} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}+1}},\ C_2 = \frac{\beta - \alpha e^{-\frac{1}{\varepsilon}+1}}{e^{-1+\varepsilon} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}+1}}.$$

Taigi tikslusis kraštinio uždavinio sprendinys

$$y(x;\varepsilon) = \frac{\left(\alpha e^{-1+\varepsilon} - \beta\right) e^{-\frac{x}{\varepsilon}+x} + \left(\beta - \alpha e^{-\frac{1}{\varepsilon}+1}\right) e^{-x+\varepsilon x}}{e^{-1+\varepsilon} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}+1}} \tag{20}$$



3 pav. (20) ir asimptotika (19); $\alpha = 0$, $\beta = 1$

Tiksliojo sprendinio analizė

Nagrinėsime (20) reiškinį, kai $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Pastebėję, kad $(\varepsilon > 0)$

$$(\forall n > 0)\ e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = o\left(\varepsilon^n\right),$$

gauname

$$y(x;\varepsilon) \approx \frac{-e^{-\frac{x}{\varepsilon}+x} + e^{-x+\varepsilon x}}{e^{-1+\varepsilon}}. \tag{21}$$

Kai $x > x_0 > 0$, turime $e^{-\frac{x}{\varepsilon}} = o\left(\varepsilon^n\right)$. Taigi intervale $x \in [x_0, 1]$ iš (21) gauname (19)) asimptotiką

$$y^0(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-1}} = e^{1-x}.$$

Tačiau, kai $\varepsilon > 0$ (21) reiškinys turi ribą:

$$\lim_{x\to 0} y(x;\varepsilon) = y(0;\varepsilon) = 0 \neq e^{1-x}\big|_{x=0} = e.$$

Matome, kad

$$\lim_{x\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} y(x;\varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{x\to 0} y(x;\varepsilon).$$

Tai ir paaiškina pasienio sluoksnio atsiradimo priežastį.

Skirtingų mastelių įtakos tyrimas

Pažymėkime

$$\eta = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Kintamąjį η vadinsime **vidiniu**, o x - **išoriniu**. Tada $x = \varepsilon\eta$ ir iš (21) gauname **vidinę** asimptotiką

$$y^i\left(\eta\right) = \frac{1 - e^{-\eta}}{e^{-1}}. \tag{22}$$

Pažymėkime **tarpinį** kintamąjį

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Tada $x = \sqrt{\varepsilon}\xi$ ir perrašome (21) formulę:

$$e\left(1 - \sqrt{\varepsilon}\xi + \frac{\varepsilon\xi^2}{2} + \cdots\right)\left(1 + \varepsilon\sqrt{\varepsilon}\xi + \cdots\right).$$

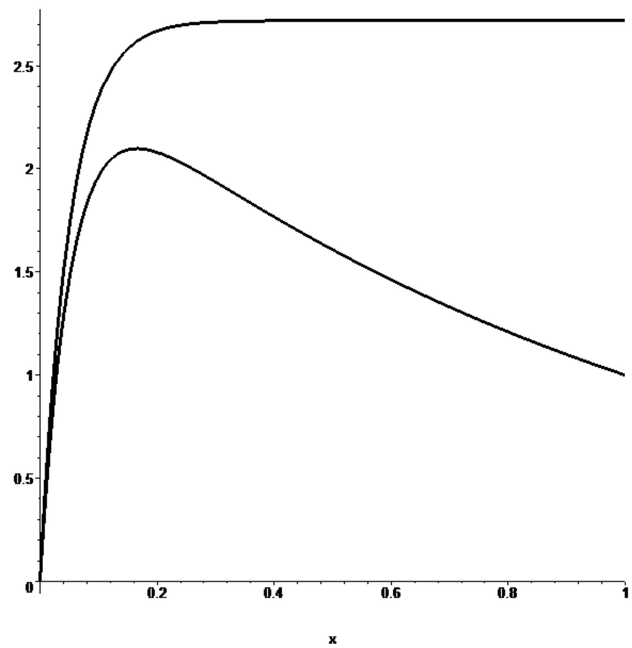
Iš čia gauname tarpinę asimptotiką

$$y^t\left(x\right) = e\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \tag{23}$$

Paveiksle parodyti jos ir tiksliojo sprendinio grafikai.

Perrašome (21) reiškinį

$$e\left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} - \cdots\right)\left(-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}e^x + e^{-x}\left(1 + \varepsilon x + \frac{\varepsilon^2 x^2}{2} + \cdots\right)\right).$$



4 pav. (20) ir asimptotika (22); $\varepsilon = 0.05$

Fiksuojame kintamąjį x ir skleidžiame pagal ε – išorinis skleidinys:

$$\left(y^0\right)^i = e + \varepsilon e(1-\xi) + \cdots$$

Tai yra išorinio skleidinio vidinė asimptotika.

Fiksuojame ξ ir gauname vidininę asimptotiką:

$$y^i = e(1-x) - e\,(1+x)\,e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + \varepsilon e\left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right) + \cdots$$

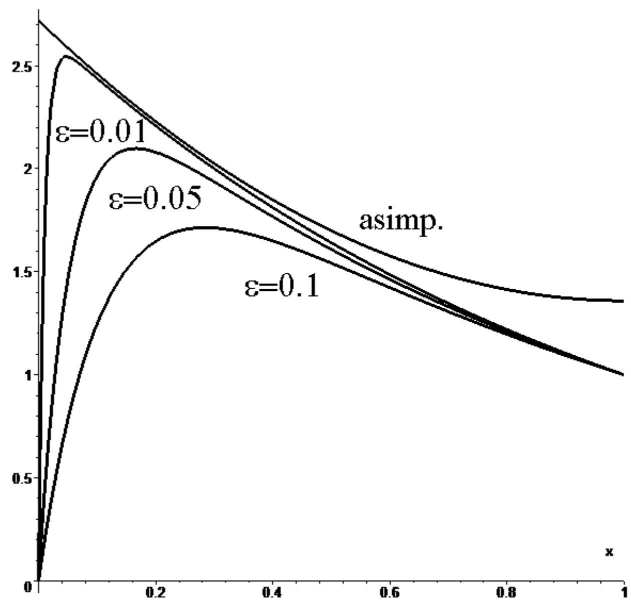
Fiksuojant x, gauname vidinės asimptotikos išorinį skleidinį:

$$\left(y^i\right)^0 = e + \varepsilon e(1 - \frac{x}{\varepsilon}) + \cdots$$

Gauname asimptotinių skleidinių **suauginimo principą**:

$$\boxed{\left(y^0\right)^i = \left(y^i\right)^0}$$

Vidinio skleidinio išorinis skleidinys sutampa su išorinio skleidinio vidiniu skleidiniu



5 pav. (20) ir asimptotika (23)

0.9. Kelių mastelių metodas

(18) lygties asimptotinio sprendinio ieškome tokiu pavidalu

$$y(x;\varepsilon) = y_0(\eta, x) + \varepsilon y_1(\eta, x) + \cdots, \ \eta = \frac{x}{\varepsilon} \tag{24}$$

Diferencijuojame (24) reiškinį:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y_{0x} + \frac{1}{\varepsilon} y_{0\eta} + \varepsilon y_{1x} + y_{1\eta} + \cdots$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y_{0xx} + \frac{1}{\varepsilon^2} y_{0\eta\eta} + \frac{2}{\varepsilon} y_{0x\eta} + \varepsilon y_{1xx} + 2y_{1x\eta} + \frac{1}{\varepsilon} y_{1\eta\eta} + \cdots$$

Įstatome šiuos reiškinius į (18) lygtį:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y_{0xx} + \frac{1}{\varepsilon^2} y_{0\eta\eta} + \frac{2}{\varepsilon} y_{0x\eta} + \varepsilon y_{1xx} + 2y_{1x\eta} + \frac{1}{\varepsilon} y_{1\eta\eta} + \cdots \right) +$$

$$y_{0x} + \frac{1}{\varepsilon} y_{0\eta} + \varepsilon y_{1x} + y_{1\eta} + \cdots +$$

$$\varepsilon^2\left(y_{0x}+\frac{1}{\varepsilon}y_{0\eta}+\varepsilon y_{1x}+y_{1\eta}+\cdots+\right)+$$

$$y_0+\varepsilon y_1+\cdots-2\varepsilon\left(y_0+\varepsilon y_1+\cdots\right)+\varepsilon^2\left(y_0+\varepsilon y_1+\cdots\right)=0$$

Prilyginame koeficientus prie vienodų ε laipsnių

$$\varepsilon^{-1}:\; y_{0\eta\eta}+y_{0\eta}=0$$

$$\varepsilon^{0}:\; y_{1\eta\eta}+y_{1\eta}=-2y_{0x\eta}-y_{0x}-y_0$$

Iš čia gauname

$$y_0\left(\eta,x\right)=A(x)-B(x)e^{-\eta}$$

$$y'_{0x}=A'-B'e^{-\eta}$$

$$y''_{0\eta x}=B'e^{-\eta}$$

Taigi

$$y_{1\eta\eta}+y_{1\eta}=\left(B-B'\right)e^{-\eta}-\left(A+A'\right)$$

Antrosios $\left(\varepsilon^0\right)$ lygties atskirasis sprendinys

$$y_1\left(\eta,x\right)=-\left(A'+A\right)\eta+\left(B'-B\right)\eta e^{-\eta}$$

Kai vidinis kintamasis $\eta\to+\infty$, gausime, kad εy_1 nėra mažas dydis. Todėl, norėdami sukonstruoti tolygiai tinkamą asimptotiką, reikalaujame

$$A'+A=0,\; B'-B=0$$

Iš čia

$$A(x)=ae^{-x},\; B(x)=be^{x}$$

Kraštinės sąlygos:

$$A(0)+B(0)=a+b=\alpha,\; A(1)+B(1)e^{-\frac{1}{\varepsilon}}=\beta$$

Taigi $A(1)=ae^{-1}=\beta$, $B(1)=be$, $a=e\beta$, $b=\alpha-e\beta$ ir

$$y_0=e\beta e^{-x}+\left(\alpha-e\beta\right)e^{x}e^{-\eta}$$

Gavome asimptotinį artinį

$$y(x;\varepsilon)\approx\beta e^{1-x}+\left(\alpha-e\beta\right)e^{-\frac{x}{\varepsilon}+x}$$

0.10. Asimptotinių skleidinių suaginimas

Nesutrukdytoji (18) lygtis (t. y., kai $\varepsilon = 0$):

$$y' + y = 0$$

Darome prielaidą, kad pasienio sluoksnis yra taške $x = 0$ ir sprendžiame lygtį esant pradinei sąlygai $y(1) = \beta$. Tada

$$y^0(x) = \beta e^{1-x}$$

Pasienio sluoksniui aproksimuoti ieškome skleidinio pavidalu $y^i(\eta)$. Įstatome į (18):

$$\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2} \left(y^i\right)''_{\eta\eta} + \left(1 - \varepsilon^2\right) \frac{1}{\varepsilon} \left(y^i\right)'_{\eta} + (1 - \varepsilon)^2 y^i = 0$$

Prilyginame ε^{-1} koeficientą nuliui:

$$\left(y^i\right)''_{\eta\eta} + \left(y^i\right)'_{\eta} = 0$$

Šios lygties bendrasis sprendinys

$$y^i = a + be^{-\eta}$$

Konstruojame skleidinį pagal išorinį kintamąjį x:

$$\left(y^i\right)^0 = a + be^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

Iš kraštinės sąlygos $x = 0$ gauname

$$y^i(0) = a + b = \alpha,$$

t. y. $b = \alpha - a$.

Kai $x > 0$ ir $\varepsilon \to 0$, gauname $\left(y^i\right)^0 = a$ ir taikome skleidinių suaginimo principą

$$\left(y^i\right)^0 = a = \left(y^0\right)^i = \beta e$$

Taigi gavome skleidinius

$$y^0 = \beta e^{1-x} + \cdots, \; y^i = \beta e + (\alpha - \beta e)\, e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + \cdots$$

Dabar konstruosime suaugintą y^0 ir y^i skleidinį:

$$y^s = y^0 + y^i - \left(y^0\right)^i = y^0 + y^i - \left(y^i\right)^0$$

Pastebėkime, kad y^s suderintas ir su vidiniu, ir su įšoriniu skleidiniu:

$$\left(y^s\right)^0 = \left(y^0\right)^0 + \left(y^i\right)^0 - \left(\left(y^0\right)^i\right)^0 =$$

$$y^0 + \left(y^i\right)^0 - \left(y^0\right)^i = y^0$$

Analogiškai

$$\left(y^c\right)^i = y^i$$

Taigi gauname asimptotinį skleidinį

$$y(x;\varepsilon) \approx \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta e)\, e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

Pastebėkime, kad kelių mąstelių skleidinyje buvo $e^{-\frac{x}{\varepsilon}+x}$.

0.10.1. Skaitinis eksperimentas

$y(t;\varepsilon)$ – tikslusis sprendinys, $\alpha = \beta = 1$

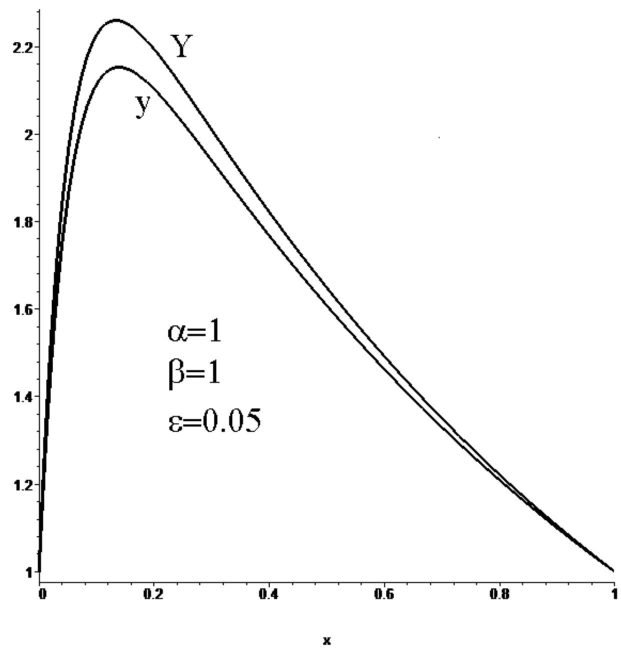
$$Y(x;\varepsilon) = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta e)\, e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

$\varepsilon = 0.1$

x	y	Y	$\lvert y-Y\rvert$	$\frac{\lvert y-Y\rvert}{\varepsilon}$
0.001	1.01086842	1.014380267	$0.35\ 10^{-2}$	$0.35\ 10^{-1}$
0.01	1.10362337	1.13646878	$0.33\ 10^{-1}$	0.33
0.1	1.65470250	1.82748255	0.17	1.73
0.5	1.552375121	1.63714358	$0.85\ 10^{-1}$	0.85
0.9	1.09392826	1.10495887	$0.11\ 10^{-1}$	0.11
0.99	1.00902528	1.00996395	$0.94\ 10^{-3}$	$0.94\ 10^{-2}$

$\varepsilon = 0.01$

x	y	Y	$\lvert y-Y\rvert$	$\frac{\lvert y-Y\rvert}{\varepsilon}$
0.001	1.15674818	1.16079921	$0.41\ 10^{-2}$	0.41
0.01	2.03629939	2.05911391	$0.23\ 10^{-1}$	2.28
0.1	2.43748114	2.45952510	$0.22\ 10^{-1}$	2.20
0.5	1.64049824	1.64872127	$0.82\ 10^{-2}$	0.82
0.9	1.10406630	1.10517092	$0.11\ 10^{-2}$	0.11
0.99	1.00994917	1.01005017	$0.10\ 10^{-3}$	0.10



6 pav. (tikslusis sprendinys $y(x;\varepsilon)$ ir asimptotika $Y(x;\varepsilon)$

$\varepsilon = 0.001$

x	y	Y	$\lvert y-Y\rvert$	$\frac{\lvert y-Y\rvert}{\varepsilon}$
0.001	2.08110092	2.08344435	$0.23\ 10^{-2}$	2.34
0.01	2.68849280	2.69115646	$0.27\ 10^{-2}$	2.66
0.1	2.45739046	2.45960311	$0.22\ 10^{-2}$	2.21
0.5	1.64789712	1.64872127	$0.82\ 10^{-3}$	0.82
0.9	1.10506041	1.10517092	$0.11\ 10^{-3}$	0.11
0.99	1.01004007	1.01005018	$0.10\ 10^{-4}$	$0.10\ 10^{-1}$

$\varepsilon = 0.0001$

x	y	Y	$\|y-Y\|$	$\frac{\|y-Y\|}{\varepsilon}$
0.001	2.71521556	2.71548690	$0.27\ 10^{-3}$	2.71
0.01	2.69096805	2.69123447	$0.27\ 10^{-3}$	2.66
0.1	2.45938176	2.45960311	$0.22\ 10^{-3}$	2.21
0.5	1.64863884	1.64872127	$0.82\ 10^{-4}$	0.82
0.9	1.10515987	1.10517092	$0.11\ 10^{-4}$	0.11
0.99	1.01004916	1.01005017	$0.10\ 10^{-5}$	$0.10\ 10^{-1}$

$\varepsilon = 0.00001$

x	y	Y	$\|y-Y\|$	$\frac{\|y-Y\|}{\varepsilon}$
0.001	2.71553778	2.71556491	$0.27\ 10^{-4}$	2.71
0.01	2.69120783	2.69123447	$0.27\ 10^{-4}$	2.66
0.1	2.45958097	2.45960311	$0.22\ 10^{-4}$	2.21
0.5	1.64871303	1.64872127	$0.82\ 10^{-5}$	0.82
0.9	1.10516981	1.10517092	$0.11\ 10^{-5}$	0.11
0.99	1.01005007	1.01005017	$0.10\ 10^{-6}$	$0.10\ 10^{-1}$

0.10.2. Lygtis su kintamais koeficientais

Spręsime kraštinį uždavinį

$$\varepsilon y'' - (2x+1)\, y' + 2y = 0 \tag{25}$$

$$y(0) = \alpha,\ \ y(1) = \beta$$

Konstruojame tesioginį skleidinį mažojo parametro ε laipsniais:

$$y(x;\varepsilon) = y_0\,(x) + \varepsilon y_1\,(x) + \cdots$$

Tada

$$-\,(2x+1)\, y_0' + 2y_0 = 0$$

Arba

$$\frac{dy_0}{dx} = -\frac{2y_0}{2x+1}$$

Šios lygties bendrasis sprendinys yra

$$y_0\,(x) = C(2x+1) \tag{26}$$

Darome prielaidą, kad pasienio sluoksnis yra taške $x = 0$. Tada $y_0(1) = 3C = \beta$ ir $y_0(x) = \frac{\beta}{3}(2x+1)$.

Pažymėkime vidinį (pasienio sluoksnio) kintamąjį

$$\eta = \frac{x}{\varepsilon^{\nu}}$$

Parametrą ν rasime vėliau. Ieškome vidinio skleidinio pasienio sluoksnyje:

$$\varepsilon\frac{1}{\varepsilon^{2\nu}}\left(y^i(\eta)\right)''_{\eta\eta} - (2\varepsilon^{\nu}\eta + 1)\frac{1}{\varepsilon^{\nu}}\left(y^i(\eta)\right)'_{\eta} + 2y^i = 0$$

Norėdami rasti pagrindinį skleidinio narį, reikalaujame $1 - 2\nu = -\nu$ arba $\nu = 1$. Tada

$$y^i_{\eta\eta} - y^i_{\eta} = 0$$

ir $y^i(\eta) = A + Be^{\eta}$. Iš pirmosios kraštinės sąlygos gauname $A + B = \alpha$ ir konstruojame skleidinį pagal išorinį kintamąjį x:

$$y^i = A + (A - \alpha)e^{\frac{x}{\varepsilon}}$$

Matome, kad negalime išskleisti reiškinio ε laipsniais ir suaginimo metodas neleidžia sukonstruoti asimptotinio skleidinio. Taigi turime suabiejoti dėl prielaidos, kad pasienio sluoksnis yra taške $x = 0$ teisingumo.

Darome prielaidą, kad pasienio sluoksnis yra taške $x = 1$. Tada $y_0(x) = \alpha(2x+1)$. Apibrėžkime vidinį (pasienio sluoksnio) kintamąjį

$$\eta = \frac{1-x}{\varepsilon^{\nu}}$$

Vidiniam skleidiniui konstruoti gauname lygtį

$$\varepsilon\frac{1}{\varepsilon^{2\nu}}\left(y^i(\eta)\right)''_{\eta\eta} - (2(1 - \varepsilon^{\nu}\eta) + 1)\frac{1}{\varepsilon^{\nu}}\left(y^i(\eta)\right)'_{\eta} + 2y^i = 0$$

Gauname $\nu = 1$ ir

$$y^i_{\eta\eta} + 3y^i_{\eta} = 0$$

Todėl

$$y^i(\eta) = \int e^{-3\eta}\,d\eta = A - Be^{-3\eta}$$

Iš antrosios kraštinės sąlygos $x = 1$ $(\eta = 0)$ gauname $A - B = \alpha$ ir konstruojame išorinį skeidinį

$$y^i(\eta)\Big|_{\eta=\frac{1-x}{\varepsilon}} = A - (A - \alpha)e^{-\frac{3}{\varepsilon}(1-x)}$$

Kai $x > 0$, gauname $\left(y^i\right)^0 = A$. Konsruojame skleidinio y_0 vidinį skleidinį

$$y_0\left(x\right)|_{x=1-\varepsilon\eta} = \alpha\left(2\left(1-\varepsilon\eta\right)+1\right) = 3\alpha - 2\varepsilon\alpha\eta$$

Turime $\left(y^0\right)^i = 3\alpha$ ir taikome skleidinių suaginimo principą

$$\left(y^0\right)^i = \left(y^i\right)^0$$

Taigi $A = 3\alpha$ ir suaugintas sskleidinys

$$y^s = y_0 + y^i - \left(y^i\right)^0 = \alpha\left(2x+1\right) + \left(\beta - 3\alpha\right)e^{-\frac{3}{\varepsilon}(1-x)}$$

0.11. Lygtys priklausančios nuo didelio parametro

Nagrinėsime antrosios eilės lygtį

$$y'' + p(x,\lambda)y' + q(x,\lambda)y = 0. \tag{27}$$

Čia λ didelis teigiamas parametras.

0.11.1. Antrosios eilės lygčių pervarkiai

Parodysime, kad (27) lygtį galima pertvarkyti į pavidalą, kai koeficientas $p \equiv 0$. Keičiame kintamąjį

$$y(x) = P(x)u(x).$$

Tada

$$y' = P'u + Pu',\ y'' = P''u + 2P'u' + Pu''.$$

Įstatome šiuos reiškinius į (27) lygtį:

$$P''u + 2P'u' + Pu'' + pP'u + Pu' + qPu = 0$$

Pareikalaukime

$$2P' + pP = 0, \tag{28}$$

arba $P = e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx}$.

Taigi (27) perrašome tokiu pavidalu

$$u'' + au = 0. \tag{29}$$

Čia $= q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p'$.

Lygtis su lėtai kintančiu koeficientu

Nagrinėjame lygtį

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a(\tau)y = 0,\ \tau = \varepsilon t.$$

Keičiame kintamąjį $t = \frac{\tau}{\varepsilon}$. Tada

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \varepsilon\frac{dy}{d\tau},\ \frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon^2\frac{d^2y}{d\tau^2}$$

ir lygtis perrašoma taip

$$\varepsilon^2\frac{d^2y}{d\tau^2} + a(\tau)y = 0.$$

Arba

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \lambda^2 a(\tau)y = 0,\ \lambda = \frac{1}{\varepsilon}.$$

0.11.2. WKB artinys

Wentzel–Kramers–Brillouin (WKB) metodas

Nagrinėsime lygtį su dideliu parametru λ:

$$\frac{1}{\lambda^2}y'' + q_1 y + \frac{1}{\lambda^2}y = 0. \tag{30}$$

Sprendinio ieškome tokiu pavidalu

$$y(x,\lambda) = e^{\lambda G(x,\lambda)},\ G = G_0 + \frac{1}{\lambda}G_1 + \frac{1}{\lambda^2}G_2 + \cdots$$

Turime

$$y' = \lambda G' e^{\lambda G},\ y'' = \left(\lambda^2 G'^2 + \lambda G''\right)e^{\lambda G}.$$

Įstatome reiškinius į lygtį:

$$\left(G_0' + \frac{1}{\lambda}G_1' + \cdots\right)^2 + q_1 + \frac{1}{\lambda}\left(G_0'' + \frac{1}{\lambda}G_1'' + \cdots\right) + \frac{1}{\lambda^2}q^2 = 0. \tag{31}$$

Arba

$$G_0'^{\,2} + q_1 + \frac{1}{\lambda}\left(2G_0'G_1' + G_0''\right) + \cdots = 0.$$

Gauname

$$G_0'^{\,2} + q_1 = 0,$$

$$G_0'' + 2G_0'G_1' = 0.$$

Tarkime, kad $q_1(x) \neq 0$, kai $x \in [a,b]$. Tada

$$G_0' = \begin{cases} \pm i\sqrt{q_1}, \text{ kai } q_1 > 0, \\ \pm\sqrt{-q_1}, \text{ kai } q_1 < 0, \end{cases}$$

ir

$$G_0 = \begin{cases} \pm i\int\sqrt{q_1}\,dx, \text{ kai } q_1 > 0, \\ \pm\int\sqrt{-q_1}\,dx, \text{ kai } q_1 < 0. \end{cases}$$

Sprendžiame antrą lygtį:

$$G_1' = -\frac{G_0''}{2G_0'} = -\frac{1}{2}\left(\ln G_0'\right)',$$

arba

$$G_1(x) = -\ln\sqrt{G_0'(x)}$$

Taigi

$$G(x,\lambda) = \begin{cases} \pm i \int \sqrt{q_1}\, dx - \frac{1}{\lambda}\left(\ln\sqrt{\pm i} + \ln\sqrt[4]{q_1}\right) + \cdots & \text{kai } q_1 > 0, \\ \pm \int \sqrt{-q_1}\, dx - \frac{1}{\lambda}\left(\ln\sqrt{\pm 1} + \ln\sqrt[4]{-q_1}\right) + \cdots & \text{kai } q_1 < 0. \end{cases}$$

Pastebėkime, kad

$$e^{\ln z} = z, \text{ t. y. } \ln z = w, \ z = e^w.$$

Pavyzdžiui,

$$\ln(\pm i) = \pm\frac{\pi}{2}i, \ \ln(-1) = \pi i.$$

Kadangi

$$e^{\lambda\left(G_0 + \frac{1}{\lambda}G_1 + \cdots\right)} = e^{\lambda G_0} \cdot e^{\frac{1}{\lambda}G_2} \cdots =$$

$$e^{\lambda G_0 + G_1} \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda}G_2 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right) \cdots,$$

gauname

$$y(x,\lambda) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{q_1}}\left(C_1 \cos\left(\lambda \int \sqrt{q_1}\, dx\right) + C_2 \sin\left(\lambda \int \sqrt{q_1}\, dx\right)\right),$$

kai $q_1(x) > 0$. Priešingu atveju

$$y(x,\lambda) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{-q_1}}\left(C_1 e^{\lambda \int \sqrt{-q_1}\, dx} + C_2 e^{\lambda \int \sqrt{-q_1}\, dx}\right).$$

0.21 pavyzdys.

$$y'' + \lambda^2 (1+x)^2 y = 0.$$

$$y \approx \frac{1}{\sqrt{1+x}}\left(C_1 \cos\lambda\left(x + \frac{1}{2}x^2\right) + C_2 \sin\lambda\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)\right)$$

Pateiksime, skaičiavimo rezultatus, kai $y(0;\lambda) = 1$, $\dfrac{dy(0;\lambda)}{dx} = -\frac{1}{2}$, $Y_0(x;\lambda) = \frac{\cos\lambda\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)}{\sqrt{1+x}}$.

$\lambda = 5$

	$x = 0.1$	$x = 0.2$	$x = 0.5$	$x = 0.7$	$x = 1.0$
y	0.8217	0.4035	-0.8205	0.0303	0.2263
Y_0	0.8251	0.4141	-0.8164	0.0967	0.2451

$\lambda = 50$

	$x = 0.1$	$x = 0.2$	$x = 0.5$	$x = 0.7$	$x = 1.0$
y	0.4888	0.0051	0.8056	-0.7607	0.6526
Y_0	0.4883	0.0040	0.8053	-0.7609	0.6518

$\lambda = 500$

	$x = 0.1$	$x = 0.2$	$x = 0.5$	$x = 0.7$	$x = 1.0$
y	-0.5874	-0.9120	-0.0720	0.2336	-0.4718
Y_0	-0.5874	-0.9120	-0.0721	0.2337	-0.4716